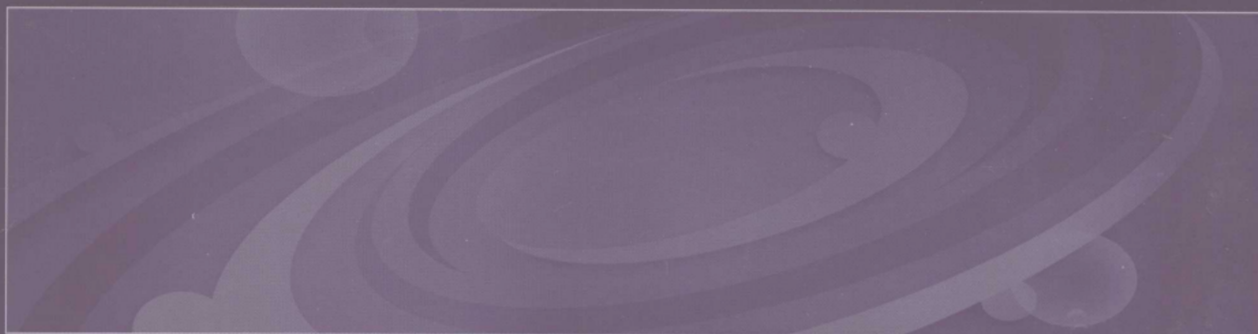
21世纪高等院校电子类课程系列教材

电磁场分析中的应用数学

DIANCICHANG FENXI ZHONG DE YINGYONG SHUXUE

余恬 雷虹 编著





北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

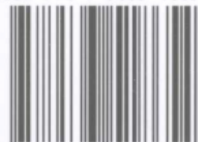
策 划 人：李欣一
责任编辑：张珊珊
封面设计：七星工作室







电磁场分析中的应用数学



ISBN 978-7-5635-1865-4

9 787563 518654

定价：27.00元



本书电子教案下载请登录
http://buptpress.com/xzzx.asp

电磁场分析中的应用数学

余 恬 雷 虹 编著

北 京 邮 电 大 学 出 版 社
·北京·

内容提要

本书介绍电磁场分析中的相关数学知识，内容包括矢量和并矢的微积分、复变函数的解析延拓、Γ函数、保角映射法求解平面静电场、超几何微分方程的正则解和常规解、常见二阶微分方程的解与特殊函数、δ函数、格林函数法、变分法，以及求非线性方程孤子解的行波法和逆散射法等。

本书可供电磁工程分析方向的研究生作教材，也可供相关方向的研究生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场分析中的应用数学/余恬，雷虹编著．—北京：北京邮电大学出版社，2009
ISBN 978-7-5635-1865-4

Ⅰ．电…　Ⅱ．①余…②雷…　Ⅲ．电磁场—应用数学—研究生—教材　Ⅳ．O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 021077 号

书　　名： 电磁场分析中的应用数学
作　　者： 余　恬　雷　虹
责任编辑： 张珊珊
出版发行： 北京邮电大学出版社
社　　址： 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部： 电话：62282185　传真：62283578
E-mail： publish@bupt.edu.cn
经　　销： 各地新华书店
印　　刷： 北京市梦宇印务有限公司
开　　本： 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张： 16.25
字　　数： 401 千字
印　　数： 1—3 000 册
版　　次： 2009 年 2 月第 1 版　2009 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1865-4　　　　定　价：27.00 元

前　言

电磁场理论涉及许多数学知识，电磁场应用技术的发展也强烈地依赖于数学分析。在本科阶段，学生一般已学过“数学物理方法”这门课程，但因课时所限，其所学尚不足以应对电磁场分析之所需。我们为电磁工程分析方向的硕士研究生编写了这本教材，目的是帮助学生熟悉电磁场分析中常用的数学知识，从而能够较深入地理解相关文献，自如地运用数学工具解决问题。现在这个版本是在我学院研究生学位课使用多年的讲义基础上修改而成的。本教材不过分追求数学上的严密，但保持了必要的严谨性，讲解细致，便于阅读。

本教材主要介绍电磁场分析所要用到的相关数学知识。全书共分 12 章。

第 1 章讲解矢量微分算符∇。为便于理解，本书借助几何图形推导出柱坐标系、球坐标系中单位矢的微分表达式，将算符∇对矢量的作用形象化，这是本教材的特点之一。该章还用算符∇讨论了时谐电磁场法向分量边界条件的非独立性问题。并矢在电磁场分析中有重要的作用。考虑到本科阶段一般不涉及并矢，所以本章对并矢及其代数运算作了较为细致的介绍，在此基础上介绍了并矢的微积分运算，并给出了一些较为常用的并矢计算公式。

第 2 章对复变函数的基本内容（主要是解析函数和留数等）进行了简单回顾，重点介绍了复平面的割线积分、解析延拓概念和 Γ 函数。

第 3 章介绍求解静电场的保角映射法。内容包括利用保角映射法求解静电场的理论根据，以及一些重要的保角映射，如幂映射、根式映射、指数映射、对数映射、分式线性映射、儒可夫斯基映射、C-S 映射等。

第 4～8 章介绍电磁场分析中的常见方程和特殊函数，所讨论的函数有勒让德多项式、拉盖尔多项式、厄米特多项式、惠泰克函数以及各类贝塞尔函数等。考虑到这些方程和函数都与超几何微分方程有渊源关系，其中第 5 章专门介绍超几何微分方程，以利于读者从总体上把握各特殊函数之间的联系。另外，为帮助读者更具体地了解这些函数，还提供了一些在一般教科书中不

曾见到的特殊函数的图像。

δ函数在求解包含激发源的场分布（包括辐射场）问题中有重要的应用。第9章介绍δ函数的基本性质，以及与之有关的亥维塞函数和sgn函数。

第10章介绍格林函数的概念和基本性质，以及应用格林函数求解非齐次微分方程定解问题的方法，并讨论了各种情况下的格林函数。

变分法是近似求极值的一种重要方法。第11章介绍泛函和变分法的基本概念、利用变分求极值的思想方法，以及变分法在求解微分方程方面的应用，并简要介绍了哈密顿变分原理，讨论了麦克斯韦方程组与哈密顿变分原理的一致性。

非线性问题近年来在电磁场分析中变得突出起来。第12章介绍了几种较常见的非线性方程，如KdV方程、sine-Gordon方程和NLS方程等，重点讲解了应用行波法和逆散射法求非线性方程的孤子解。读者可借此对非线性问题有初步的认识。

本书第1～11章由余恬编写，第12章由雷虹编写。全书由余恬统稿。本书的编写得到了山东大学信息科学与工程学院的领导和同事们的大力支持，在此我们深表谢意。

由于水平有限，书中不妥甚至错误之处可能不少。我们诚挚地希望使用本教材的教师和读者给予指正。

编　者

目　　录

第 1 章　矢量微分算符

第 5 章 超几何微分方程的正则解

第 6 章 勒让德方程与勒让德函数

第 7 章 合流超几何微分方程

第 8 章 贝塞尔方程与贝塞尔函数

第9章 δ函数

第10章 解非齐次方程定解问题的格林函数法

第1章　矢量微分算符

在物理学中，某一物理量的空间分布构成一个物理的“场”。标量(如电位等)的空间分布构成标量场，矢量(如电场强度等)的空间分布构成矢量场。场的数学表示是时间与空间坐标的标量函数 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ (对于标量场)或矢量函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ (对于矢量场)。描写场在各点的空间变化趋势需要用微分手段，矢量微分算符 ∇ (读做“哈密顿”或“那勃勒”) 就是为了这个目的而引入的。

本章的第1～3节内容在本科阶段已经作过介绍，但为了便于读者复习和查阅，也为了理论体系的完整，这里仍然予以保留。对这部分内容比较熟悉的读者可从第4节开始学习。第7节用算符 ∇ 讨论了时谐电磁场法向分量边界条件的非独立性问题，从这个例子中读者可以获得对算符 ∇ 的深刻理解。

并矢是电磁场分析中的一个重要工具。本章最后两节将介绍并矢的定义，以及算符 ∇ 对并矢的作用，并给出并矢的一些基本运算公式。

1.1　标量场的方向导数与梯度

1.1.1　方向导数

在标量场中的一点，沿不同方向，标量值的空间变化率一般不同。方向导数描写的是标量沿给定方向的变化率。

定义　标量函数 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 在点 M_0 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为

$$\frac{\partial\phi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\phi(M)-\phi(M_0)}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta l}\tag{1-1-1}$$

这里射线 $\boldsymbol{l}$ 的起点在 M_0，M 在 $\boldsymbol{l}$ 上，Δl 是 M 与 M_0 间的距离，见图1-1-1。

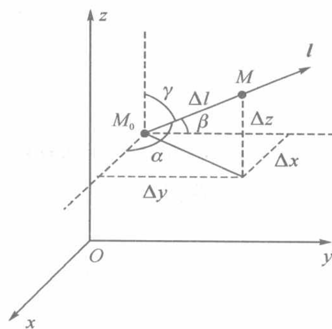


图1-1-1　射线 $\boldsymbol{l}$

显然，$\dfrac{\partial\phi}{\partial l}>0$ 表示 ϕ 从 M_0 点起，沿 $\boldsymbol{l}$ 所指的方向是增大的。

在直角坐标系中，有

$$\frac{\partial \phi}{\partial l}=\frac{\partial \phi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial \phi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial \phi}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-1-2}$$

这里 $\cos\alpha=\frac{\partial x}{\partial l}$，$\cos\beta=\frac{\partial y}{\partial l}$，$\cos\gamma=\frac{\partial z}{\partial l}$ 是沿三个直角分量的方向余弦。

1.1.2 梯度

梯度是空间点的矢量函数，其方向是标量场在该点有最大增加率的方向，其值则为沿该方向的方向导数值。下面导出梯度的表达式。

设射线 $\boldsymbol{l}$ 的起点在 M_0，其单位矢为

$$\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma \tag{1-1-3}$$

引入矢量

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial \phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial \phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1-1-4}$$

则根据式(1-1-2)～式(1-1-4)，有

$$\frac{\partial \phi}{\partial l}=\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{G}=|\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{e}_l) \tag{1-1-5}$$

显然，当 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\boldsymbol{G}$ 同向时，$\frac{\partial \phi}{\partial l}$ 有正的最大值 $|\boldsymbol{G}|$。因此，矢量 $\boldsymbol{G}$ 同时给出了有最大方向导数的方向和最大的方向导数值。$\boldsymbol{G}$ 就定义为标量场 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 的梯度，记为

$$\mathrm{grad}\,\phi\equiv\boldsymbol{G}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial \phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial \phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1-1-6}$$

引入哈密顿(Hamilton)算符

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-1-7}$$

则式(1-1-6)可写为

$$\mathrm{grad}\,\phi=\nabla\phi \tag{1-1-8}$$

应当指出的是，梯度 $\mathrm{grad}\,\phi$ 的定义是式(1-1-5)，即 ϕ 沿任意方向的方向导数等于梯度在该方向的分量；式(1-1-6)的右边则仅仅是梯度矢量在直角坐标系中的具体计算公式；而式(1-1-8)则仅仅给出了 $\mathrm{grad}\,\phi$ 的简写符号。

按式(1-1-8)，式(1-1-5)可写为 $\frac{\partial \phi}{\partial l}=\boldsymbol{e}_l\cdot\nabla\phi$。注意到 ϕ 为任意标量函数，故有

$$\frac{\partial}{\partial l}=\boldsymbol{e}_l\cdot\nabla \tag{1-1-9}$$

此为方向导数算符与梯度算符的关系，应用该式常可简化运算。

若沿等值面

$$\phi(x,y,z)=\text{常数}$$

取微分，则有

$$\mathrm{d}\phi=\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

此即 $\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$（$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿等值面），可见梯度总垂直于等值面。

根据式(1-1-7)，很容易证明以下运算法则成立：

$$\nabla C=0 \quad (C\text{ 为空间常数}) \tag{1-1-10}$$

$$\nabla(Cu)=C\nabla u \tag{1-1-11}$$

$$\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v \tag{1-1-12}$$

$$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v \tag{1-1-13}$$

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\nabla u-u\nabla v) \tag{1-1-14}$$

$$\nabla[f(u)]=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u \tag{1-1-15}$$

证明从略。

【例 1-1-1】 对标量函数 $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 ∇r 和 $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$。

解

$$\nabla r=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{e}_r$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla r=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

事实上，标量函数 r 的等值面是以原点为球心的球面，显然 r 沿径向($\boldsymbol{e}_r$ 方向)的变化最快，而且其变化率为 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}=+1$，故有 $\nabla r=\boldsymbol{e}_r$。

【例 1-1-2】 在求解静电场分布的有限差分法中，为导出适用于正六边形区域(见图 1-1-2)的电位差分公式，需要用到下面的关系式：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) \tag{1-1-16}$$

这里 $\phi=\phi(x,y)$ 为节点 (x,y) 的电位，$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$ 和 $\frac{\partial\phi}{\partial\xi}$ 分别为 ϕ 沿 $\boldsymbol{e}_\eta$ 和 $\boldsymbol{e}_\xi$ 方向的方向导数。试证明此式。

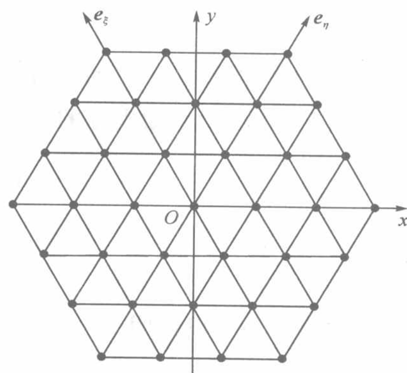


图 1-1-2 正六边形区域的网格划分

证 由图 1-1-2 可知

$$\boldsymbol{e}_\eta=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_x+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y),\quad \boldsymbol{e}_\xi=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{e}_x+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y) \tag{1-1-17}$$

于是按式(1-1-9)可写出

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=\boldsymbol{e}_\eta\cdot\nabla\phi=\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}=\boldsymbol{e}_\xi\cdot\nabla\phi=-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

同理有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}&=\boldsymbol{e}_\eta\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\boldsymbol{e}_\xi\cdot\nabla\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\\&=(\boldsymbol{e}_\eta-\boldsymbol{e}_\xi)\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+(\boldsymbol{e}_\eta+\boldsymbol{e}_\xi)\cdot\nabla\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\end{aligned} \tag{1-1-18}$$

上面最后一步利用了 $\boldsymbol{e}_\eta-\boldsymbol{e}_\xi=\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_\eta+\boldsymbol{e}_\xi=\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y$，见式(1-1-17)。

由式(1-1-18)可立即得到式(1-1-16)。证完。

1.1.3　两点间距的梯度

若两点分别位于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$，这里

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$$

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_x x'+\boldsymbol{e}_y y'+\boldsymbol{e}_z z'$$

图 1-1-3　两点间的相对位矢

如图 1-1-3 所示，则此两点的间距可表示为 $R=|\boldsymbol{R}|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$。在电磁场分析中经常会用到 R 的梯度。

把 R 写为

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \tag{1-1-19}$$

则可得

$$\nabla R=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial R}{\partial z}=\boldsymbol{e}_R \tag{1-1-20}$$

这里

$$\boldsymbol{e}_R=\frac{\boldsymbol{e}_x(x-x')+\boldsymbol{e}_y(y-y')+\boldsymbol{e}_z(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\frac{\boldsymbol{R}}{R} \tag{1-1-21}$$

为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 的单位矢，方向从 $\boldsymbol{r}'$ 指向 $\boldsymbol{r}$。

以 ∇' 表示对带撇坐标的运算，即

$$\nabla'=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z'} \tag{1-1-22}$$

则又有

$$\nabla' R=-\boldsymbol{e}_R \tag{1-1-23}$$

类似地还可以证明

$$\nabla'\frac{1}{R}=-\nabla\frac{1}{R}=\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{1-1-24}$$

证明留给读者完成。

1.2　矢量场的通量与散度

1.2.1　通量

设矢量函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 构成矢量场，S 为场中的某一曲面。在 S 上 (x,y,z) 处取一矢量面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，规定其法向单位矢 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 与面元周界线的走向成右手螺旋，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 在面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 上的通量定义为

$$\mathrm{d}\Psi=\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-2-1}$$

而 $A(x,y,z)$ 在整个曲面 S 上的通量即为

$$\Psi = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-2-2}$$

若 S 为闭曲面，则

$$\Psi = \oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-2-3}$$

对闭曲面，规定其法矢量处处向外，于是按式(1-2-3)，若 $\Psi>0$，则表示由闭曲面 S 中流出的通量多于由外面流入 S 中的通量，这表明 S 中“源”强于“洞(即吸收源)”；若 $\Psi<0$，则 S 中“洞”强于“源”。可见闭曲面的通量反映了在所围的空间内矢量场源的总体分布情况。但它不能反映源在各点的具体分布。

1.2.2 散度

由上面可知，若要了解源在某点 a 的强弱情况，可以包围 a 点取一小的闭曲面，然后令其向 a 点无限收缩。在极限情况下，单位体积的通量就可以反映这一点源的强弱。这就是散度的含义，即，矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 在 a 点的散度定义为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right) \tag{1-2-4}$$

式中，ΔV 是闭曲面 S 包围的体积，a 点始终在 S 内。

显然，散度是标量。若 a 点的散度为 0，则表示在 a 点没有源。在一个处处无源的区域内，散度处处为 0。

1.2.3 散度的微分形式

根据高斯公式：

$$\oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)\mathrm{d}V \tag{1-2-5}$$

这里 V 是 S 所围的空间区域，$\cos\alpha$ 等是矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向余弦：

$$\begin{cases} \cos\alpha \mathrm{d}S = \boldsymbol{e}_x \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \cos\beta \mathrm{d}S = \boldsymbol{e}_y \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \cos\gamma \mathrm{d}S = \boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{cases} \tag{1-2-6}$$

在式(1-2-5)中依次改 P 、Q 、R 为 A_x、A_y、A_z，可得

$$\oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)\mathrm{d}V \tag{1-2-7}$$

规定 ∇ 算符〔见式(1-1-7)〕作用于其右边的函数或矢量上时，总是先作微分运算，后作矢量运算，注意到 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 皆为常矢量，即有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{1-2-8}$$

则式(1-2-7)可写为

$$\oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\mathrm{d}V \tag{1-2-9}$$

将此式代入式(1-2-4)，得

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0}\left[\frac{1}{\Delta V}\iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\mathrm{d}V\right] = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{A})\Delta V}{\Delta V} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

可见

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\nabla \cdot \boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-2-10}$$

此即散度的微分形式。式(1-2-9)则称为散度定理。

1.2.4 散度的运算法则

设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 为矢量函数，ϕ 为标量函数，则有如下计算公式：

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})=\nabla \cdot \boldsymbol{A} \pm \nabla \cdot \boldsymbol{B} \tag{1-2-11}$$

$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A})=(\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{A}+\phi \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1-2-12}$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi=\nabla^2 \phi \tag{1-2-13}$$

式(1-2-13)中，∇^2 为拉普拉斯(Laplace)算符，该式表明 $\nabla^2=\nabla \cdot \nabla$。在直角坐标系中，有

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-2-14}$$

利用直角坐标系中的矢量表达式和式(1-1-7)，并注意到 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 皆为常矢量，不难证明以上各式。

【例 1-2-1】 求矢量函数 $\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}$ $(r \neq 0)$的散度，其中 q 是常数。

解 根据公式(1-2-12)，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}=\nabla \cdot \left(\frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}\right)=\frac{q}{4\pi}\left[\left(\nabla \frac{1}{r^3}\right) \cdot \boldsymbol{r}+\frac{1}{r^3}\nabla \cdot \boldsymbol{r}\right]$$

因为

$$\nabla \frac{1}{r^3}=\left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r^3}=-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}$$

而

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z)=3$$

故

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi}\left(-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5} \cdot \boldsymbol{r}+\frac{3}{r^3}\right)=0$$

本题还可以这样来计算：利用 $\nabla \frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ (见例 1-1-1)，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}=\varepsilon_0 \nabla \cdot \left[\nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\right]=\varepsilon_0 \nabla^2 \phi$$

这里 $\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 为 $r=0$ 处点电荷 q 引起的电位，在 $r \neq 0$ 处，它满足方程 $\nabla^2 \phi=0$。由此可知 $\nabla \cdot \boldsymbol{D}=0$ $(r \neq 0)$。

1.2.5 格林公式

利用散度定理(1-2-9)，可以证明下面两个重要的格林公式：

$$\iiint_V \nabla \cdot (u \nabla v) \mathrm{d}V = \oiint_S u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1-2-15}$$

$$\iiint_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \mathrm{d}V = \oiint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \tag{1-2-16}$$

其中，S 是 V 的边界面，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为沿 S 的法线向外的方向导数。式(1-2-15)称为第一格林公式，式(1-2-16)称为第二格林公式。

证 在散度定理(1-2-9)中，令 $\boldsymbol{A}=u\nabla v$，注意到 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 沿外法向，$\nabla v \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S$，则有

$$\iiint_V \nabla \cdot (u \nabla v) \mathrm{d}V = \oiint_S u \nabla v \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}S$$

式(1-2-15)得证。

再令 $\boldsymbol{A}=v\nabla u$，则又有

$$\iiint_V \nabla \cdot (v \nabla u) \mathrm{d}V = \oiint_S v \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S$$

以式(2-1-15)减此式，有

$$\iiint_V [\nabla \cdot (u \nabla v) - \nabla \cdot (v \nabla u)] \mathrm{d}V = \oiint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S$$

注意到

$$\nabla \cdot (u \nabla v) - \nabla \cdot (v \nabla u) = u \nabla^2 v - v \nabla^2 u$$

于是式(1-2-16)得证。

显然，式(1-2-15)和式(1-2-16)成立的前提条件是 $u(\boldsymbol{r})$ 和 $v(\boldsymbol{r})$ 在闭区域 V 上有连续的一阶偏导数，在 V 内有连续的二阶偏导数。

1.3 矢量场的环量与旋度

1.3.1 环量

矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 沿某闭合曲线 C 的环量即积分 $\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为 C 上的元位移，其意义在于反映回路 C 中有无环量源。例如在电磁学中，磁场强度 $\boldsymbol{H}(x,y,z)$ 的环量 $\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I$ 反映了在回路 C 中有无传导电流，传导电流就是磁场的环量源。由于环量不为 0 的矢量线是涡旋线，故环量源又称涡旋源。

1.3.2 旋度

环量反映的是在一个有限大小的环路中有无涡旋源，但不能反映涡旋源在场中各点的

详细分布情况。下面给出的旋度矢量就是描述涡旋源分布的量。

考虑某点 a。过 a 点取一小面元 ΔS,面元的周界为 C,则极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\left(\frac{1}{\Delta S}\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 在 a 点的环量面密度,或环量强度。环量强度的值与面元法方向(它与 C 的绕行方向成右手螺旋)的空间取向有关,因此环量强度在同一点可以有无穷多个不同的值。

规定最大的环量强度值为旋度矢量的量值,该值所对应的面元 ΔS 的法方向则为旋度矢量的方向。这样就定义了旋度,记为 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$,即有

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}}{\Delta S}\left(\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)_{\max}\right] \tag{1-3-1}$$

式中,$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$为面元 ΔS 的单位法矢量,它与 C 的绕行方向成右手螺旋。

若在某区域中处处有 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场。由旋度的定义可知,"无旋"意味着在此区域中处处有 $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$。回忆在力学和静电场理论中学过的知识,可知保守力场是无旋场。

1.3.3 旋度的微分形式

考虑斯托克斯(Stokes)定理:

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$
$$=\iint_{\Delta S}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S \tag{1-3-2}$$

这里 ΔS 是C 所围的曲面, $\cos\alpha$ 等是矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向余弦。把 P、Q、R 依次改为 A_x、A_y、A_z,则式(1-3-2)可写为

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_{\Delta S}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\mathrm{d}S \tag{1-3-3}$$

另一方面,按 ∇ 的直角坐标形式和矢量积的运算公式,有

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \tag{1-3-4}$$

利用式(1-2-6),则可写出

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\mathrm{d}S \tag{1-3-5}$$

于是式(1-3-3)可写为

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_{\Delta S}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-3-6}$$

此为斯托克斯定理的矢量形式。

把式(1-3-6)代入式(1-3-1),得

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}&=\lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}}{\Delta S}\left(\iint_{\Delta S}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)_{\max}\right]\\&=\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\left(\frac{\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}}{\Delta S}\right)_{\max}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\left[(\nabla\times\boldsymbol{A})_{\mathrm{n}}\right]_{\max}\end{aligned}\tag{1-3-7}$$

因为 $(\nabla\times\boldsymbol{A})_{\mathrm{n}}$ 为最大时,矢量 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 与 $\Delta\boldsymbol{S}$ 同方向,即与 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 同方向,可见此时 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 即为 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的单位矢,故 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\left[(\nabla\times\boldsymbol{A})_{\mathrm{n}}\right]_{\max}=\nabla\times\boldsymbol{A}$,于是得

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}\tag{1-3-8}$$

此即旋度的微分形式。

1.3.4 旋度的运算法则

设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 为矢量函数,ϕ 为标量函数,利用旋度的微分形式,可证明如下计算公式:

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}\pm\nabla\times\boldsymbol{B}\tag{1-3-9}$$

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})=\phi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\phi\times\boldsymbol{A}\tag{1-3-10}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0\tag{1-3-11}$$

$$\nabla\times\nabla\phi=0\tag{1-3-12}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\tag{1-3-13}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\tag{1-3-14}$$

按算符运算的惯例,两个算符从左边连续作用于一个函数上时,总是最右边的一个先作用,因此,上面的式子中,$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}$ 等同于 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$,$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$ 等同于 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$,等等。

除以上外,下面的运算也与旋度有关:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}\tag{1-3-15}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\tag{1-3-16}$$

下面证明式(1-3-13),其余各式的证明留给读者。

证 用 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的三个分量替换式(1-3-4)行列式中 $\boldsymbol{A}$ 的三个分量,有

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\end{vmatrix}$$

等号右边的三个分量分别为:

$$\begin{aligned}x\text{ 分量}&=\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\nabla^2 A_x-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\right)\\&=-\nabla^2 A_x+\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

$$y\text{ 分量}=-\nabla^2 A_y+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

$$z\ 分量\ = -\nabla^2 A_z + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$$

将此三式综合起来，就得到式(1-3-13)。证完。

1.3.5 矢量微分运算的一般法则

从前面的各运算法则可以归纳出这样的认识：首先，∇ 是微分算符，它对其右边的函数(标量的和矢量的)进行微分运算，这种运算服从微分运算的一般法则；其次，∇ 又是矢量算符，它的矢量乘法仅针对函数中的矢量部分，并服从矢量乘法的一般法则。据此，可以容易地写出涉及 ∇ 的各个公式。

例如，对∇加下标 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$，分别表示∇仅作用于 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$，则有

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = \nabla_\phi \times (\phi \boldsymbol{A}) + \nabla_A \times (\phi \boldsymbol{A}) = \nabla \phi \times \boldsymbol{A} + \phi \nabla \times \boldsymbol{A}$$

此即公式(1-3-10)。

又如：

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \nabla_A \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + \nabla_B \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{1-3-17}$$

根据矢量运算公式

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1-3-18}$$

并注意到 ∇_A和 ∇_B只能从左边分别作用在 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 上，则有

$$\nabla_A \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$$

$$\nabla_B \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$$

于是式(1-3-17)可写为

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\nabla \cdot \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$$

此即公式(1-3-14)。

同样，对于 $\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$，有

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \nabla_A(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) + \nabla_B(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$$

利用公式(1-3-18)，可写出

$$\nabla_A(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$$

$$\nabla_B(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$$

于是得到

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

此即公式(1-3-16)。

不难看出，以上法则对散度运算同样成立。

1.3.6 旋度定理

在散度定理(1-2-9)中令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}$，则有

$$\oiint_S \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}) dV \tag{1-3-19}$$

令 $\boldsymbol{C}$ 为任意常矢量，利用公式(1-3-15)，并注意到 $\nabla \times \boldsymbol{C} = 0$，式(1-3-19)可写为

$$\oiint_S \boldsymbol{B} \times d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{C} = -\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} dV$$

因 $\boldsymbol{C}$ 为常量，可从积分号内提出，故有

$$\left(\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\times \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)\cdot \boldsymbol{C}=\left(-\iiint_V \nabla\times \boldsymbol{B}\mathrm{d}V\right)\cdot \boldsymbol{C}$$

又因 $\boldsymbol{C}$ 为任意，于是有

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\times \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iiint_V \nabla\times \boldsymbol{B}\mathrm{d}V \tag{1-3-20}$$

此式即为旋度定理。

1.3.7 矢量格林公式

由散度定理 $\iiint_V \nabla\cdot \boldsymbol{f}\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，令 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{a}\times\nabla\times\boldsymbol{b}$，利用公式(1-3-15)，即

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$$

则有

$$\iiint_V (\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{b})\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_S (\boldsymbol{a}\times\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-3-21}$$

此式为第一矢量格林公式。

在式(1-3-21)中交换 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，又有

$$\iiint_V (\nabla\times\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{a})\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_S (\boldsymbol{b}\times\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

与式(1-3-21)相减，得

$$\begin{aligned}\iiint_V (\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{b})\mathrm{d}V&=\oint\!\!\!\oint_S (\boldsymbol{a}\times\nabla\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\oint\!\!\!\oint_S [(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{a})\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{b})\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}]\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1-3-22}$$

最后一步利用了公式 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。式(1-3-22)即为第二矢量格林公式。

1.4 圆柱坐标系中的矢量微分算符

在前面几节的论证中，我们采用的是 ∇ 算符在直角坐标系中的表达式。但在许多情况下，需要采用圆柱坐标系和球坐标系。在这两种坐标系中，三个基本单位矢的方向一般会随场点的改变而改变，因此，微分算符对基本单位矢的作用结果一般不为 0。这与直角坐标系非常不同，在学习中应对此给予特别的注意。

本节只讨论圆柱坐标系，下一节讨论球坐标系。

1.4.1 基本单位矢与 ∇ 算符

圆柱坐标系的空间坐标为 (ρ,φ,z)，如图 1-4-1 所示。三个正交的基本单位矢依次为 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$，其中除 $\boldsymbol{e}_z$ 外，$\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 的方向都随角 φ 而变，从根本上说，是随场点的方位而变。认识到这一点十分重要。

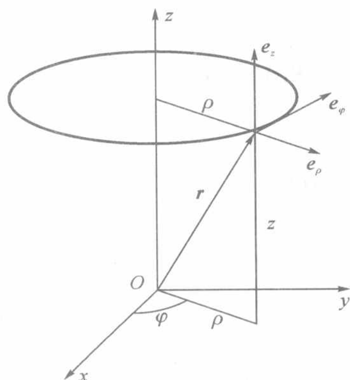


图 1-4-1 圆柱坐标系

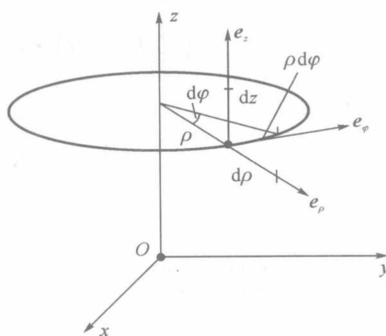


图 1-4-2 沿三个方向的无限小长度

在圆柱坐标系中，空间矢量的表达式为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_\rho A_\rho+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{e}_z A_z$，矢径的表达式为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z z$。须注意，虽然矢径的表达式不显含 φ，但因 $\boldsymbol{e}_\rho$随 φ 而变，所以 $\boldsymbol{r}$ 也是 φ 的函数。

$\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$三者间有下述关系：

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_\varphi\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_\rho\\ \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_\varphi\\ \boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_\varphi=\boldsymbol{e}_z\end{cases}\tag{1-4-1}$$

根据式(1-1-7)，可知 ∇ 算符的各分量是对相应方向的长度求偏导数。因此，在圆柱坐标系中，就应有

$$\nabla=\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial l_\rho}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial l_\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial l_z}\tag{1-4-2}$$

其中 ∂l_ρ等是沿 $\boldsymbol{e}_\rho$等方向的无限小长度。由图 1-4-2 可以看出

$$\mathrm{d}l_\rho=\mathrm{d}\rho,\ \mathrm{d}l_\varphi=\rho\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}l_z=\mathrm{d}z$$

因此式(1-4-2)可改写为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\tag{1-4-3}$$

此即 ∇ 算符在圆柱坐标系中的表达式。

这里应特别强调的是，∇ 算符作用于右边的函数或矢量上时，总是先作微分运算，然后才作矢量运算。接下来就会看到，单位矢的偏微分一般不等于 0，因此 ∇ 的表达式(1-4-3)中，单位矢与微分算符不可交换顺序。

1.4.2 ∇^2算符和散度、旋度

因为 $\boldsymbol{e}_\rho$和 $\boldsymbol{e}_\varphi$的方向都随 φ 而变，故 ∇ 算符对 $\boldsymbol{e}_\rho$和 $\boldsymbol{e}_\varphi$的作用结果不为 0，这与直角坐标系中的情况不同，从而 ∇^2算符和散度、旋度的表达式也与直角坐标系中的情况不同。

由图 1-4-3 可以看出 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi$，故

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi,\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{e}_\rho\tag{1-4-4}$$

而 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$皆与 ρ 、z 无关，故

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\alpha}{\partial\rho}=\frac{\partial\boldsymbol{e}_\alpha}{\partial z}=0\ (\alpha=\rho,\varphi,z)\tag{1-4-5}$$

根据以上讨论，有

$$\nabla^2\phi=\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{\rho\partial\phi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial\phi}{\rho\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\left(\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi\partial\rho}-\boldsymbol{e}_\rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\tag{1-4-6}$$

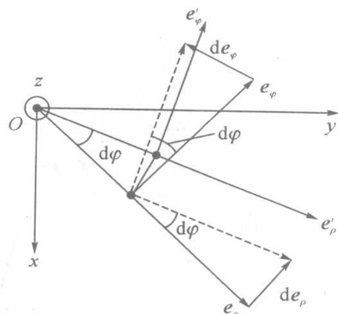


图 1-4-3　单位矢微分的平面图

也可类似地得出散度公式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{e}_\rho A_\rho+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{e}_z A_z)$$

$$=\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}A_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+\frac{A_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\tag{1-4-7}$$

现在推导旋度的计算公式。首先写出

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\boldsymbol{e}_\rho A_\rho+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{e}_z A_z)$$

将等号右边展开，并利用式(1-4-4)和式(1-4-5)，则有

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_\rho\times\left(\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi\times\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}-\boldsymbol{e}_\rho A_\varphi+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}\right)+\boldsymbol{e}_z\times\left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)$$

$$=\boldsymbol{e}_z\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}-\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial A_z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(-\boldsymbol{e}_z\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z A_\varphi+\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}\right)+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$=\boldsymbol{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}+\frac{A_\varphi}{\rho}\right)$$

该结果可写成以下便于记忆的形式：

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}\tag{1-4-8}$$

1.5　球坐标系中的矢量微分算符

1.5.1　基本单位矢与 ∇ 算符

球坐标系的空间坐标为(r,θ,φ)，三个正交的基本单位矢依次为 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$，如图 1-5-1 所示。它们皆是场点方位角(θ,φ)的函数，不过 $\boldsymbol{e}_\varphi$仅与 φ 有关，而与 θ 无关。

在球坐标系中，空间矢量的表达式为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r A_r+\boldsymbol{e}_\theta \boldsymbol{A}_\theta+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi$。当场点的 θ 和 φ 改变时，式中的 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$也随之改变。

$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$三者之间有如下关系：

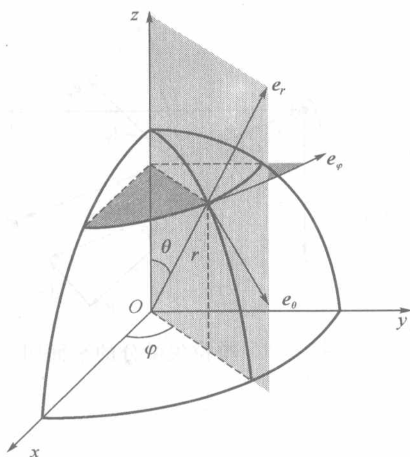


图 1-5-1　球坐标系

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi \end{cases} \tag{1-5-1}$$

根据上一节的说明，可知在球坐标系中有

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial l_r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial}{\partial l_\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial l_\varphi} \tag{1-5-2}$$

其中，∂l_r等是$\boldsymbol{e}_r$等方向的无限小长度。由图 1-5-1 可以看出，$\mathrm{d}l_r = \mathrm{d}r$，$\mathrm{d}l_\varphi = r\sin\theta \mathrm{d}\varphi$，$\mathrm{d}l_\theta = r\mathrm{d}\theta$。由此，式(1-5-2)即为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{1-5-3}$$

这就是 ∇ 算符在球坐标系中的表达式。

1.5.2　∇^2算符和散度、旋度

由图 1-5-2 可以看出，若保持 φ 不变，使 θ 角改变 $\mathrm{d}\theta$，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_r \mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi = 0 \tag{1-5-4}$$

故有

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \tag{1-5-5}$$

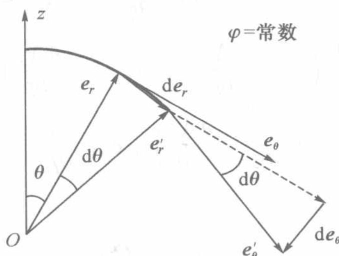
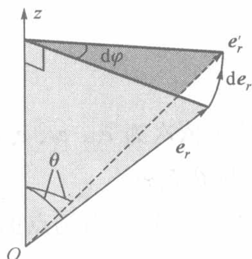


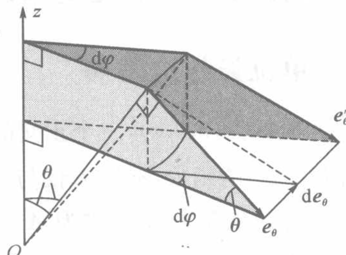
图 1-5-2　单位矢随 θ 的变化

由图 1-5-3 和图 1-5-4 则可看出，若保持 θ 不变，使 φ 角改变 $\mathrm{d}\varphi$，则有

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\varphi \sin\theta \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi \cos\theta \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi = -(\boldsymbol{e}_r \sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta)\mathrm{d}\varphi \end{cases} \tag{1-5-6}$$



(a) $\boldsymbol{e}_r$随φ的变化



(b) $\boldsymbol{e}_\theta$随φ的变化

图 1-5-3　$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 随 φ 的变化

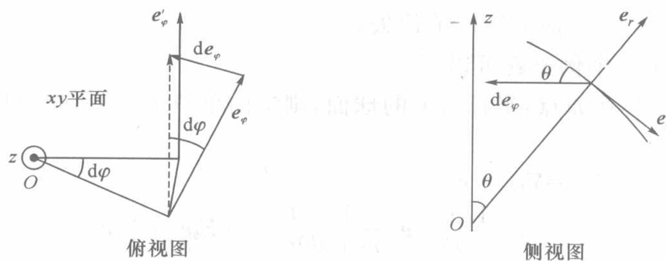


图 1-5-4　e_φ 随 φ 的变化

由此又有

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi \sin\theta,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi \cos\theta,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi}=-(\boldsymbol{e}_r \sin\theta+\boldsymbol{e}_\theta \cos\theta) \tag{1-5-7}$$

由于单位矢的偏导数不为0,故与圆柱坐标系中情况一样,式(1-5-3)中的单位矢也不能与微分算符交换顺序。

由式(1-5-5)和式(1-5-7),可以写出

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\end{aligned} \tag{1-5-8}$$

与在圆柱坐标系中的做法类似,不难导出

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot(\boldsymbol{e}_rA_r+\boldsymbol{e}_\theta A_\theta+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi)\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\end{aligned} \tag{1-5-9}$$

和

$$\begin{aligned}\nabla\times A &= (\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})\times(\boldsymbol{e}_rA_r+\boldsymbol{e}_\theta A_\theta+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi)\\ &=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\,A_\varphi\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1-5-10}$$

式(1-5-9)和式(1-5-10)请读者自行证明。

【例 1-5-1】 已知电偶极子的电位为 $\phi(r,\theta,\varphi)=\frac{p}{r^2}\cos\theta$,常数 p 为电偶极矩,试根据公式 $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$,求电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的空间分布。

解 利用式(1-5-3),有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{p}{r^2}\cos\theta\\ &=-p\left(-\boldsymbol{e}_r\frac{2}{r^3}\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r^3}\sin\theta\right)=\frac{p}{r^3}(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)\end{aligned}$$

【例 1-5-2】 试证明,对于一般的曲面,若将 ∇ 算符和矢量 $\boldsymbol{E}$ 都分解为切向分量和法向分量:$\nabla=\nabla_t+\nabla_n$,$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t+\boldsymbol{E}_n$(下标 t 、n 分别代表切向和法向),则一般情况下,有

(1) $\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t$ 的切向分量不为0;

(2) $\nabla_t \cdot \boldsymbol{e}_n \neq 0$，$\boldsymbol{e}_n$为曲面的法向单位矢。

证　只需各举出一个例子就可以了。

(1) 若界面为中心在原点，半径为 r 的球面，则法向单位矢为 $\boldsymbol{e}_r$，切向单位矢为 $\boldsymbol{e}_\theta$和 $\boldsymbol{e}_\varphi$，于是有

$$\begin{aligned}\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t &= \nabla_{\theta,\varphi} \times \boldsymbol{E}_{\theta,\varphi} \\ &= \left(\boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \times (E_\theta \boldsymbol{e}_\theta + E_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi)\end{aligned}$$

等号右边展开后共有 8 项。利用 $\boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\theta = 0$，$\boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_\varphi = 0$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\theta} = 0$，可将上式改写为

$$\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta \times \left(E_\theta \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\theta + E_\theta \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi} + E_\varphi \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

再根据式(1-5-5)、式(1-5-7)和式(1-5-1)可以得到

$$\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial\theta} + \cot\theta E_\varphi - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right) - \boldsymbol{e}_\theta \frac{E_\varphi}{r} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{E_\theta}{r}$$

显然切向分量不为 0。

(2) 若界面是以 z 轴为轴线，半径为 ρ 的圆柱面，取圆柱坐标 (ρ,φ,z)，则 $\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_\rho$，于是

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{e}_n = \left(\boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho}\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}$$

根据式(1-4-4)可知 $\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{\rho} \neq 0$。

证完。

这个例子告诉我们，不能把 ∇ 算符看成单纯的矢量。切记，当 ∇ 作用于右边的函数或矢量时，总是先作微分运算，然后才作矢量运算的。

1.6　正交曲线坐标系中的矢量微分算符

在理论分析中，有时需要脱离某种特定的坐标系(例如前面涉及到的三种坐标系)，以使讨论结果具有更加广泛的适用性。本节所要介绍的正交曲线坐标系就是一种非特定的坐标系，它是一大类具有共同特点的坐标系的总称。了解并掌握这种坐标系，对于从事电磁场分析工作具有重要的意义。

1.6.1　正交曲线坐标系　拉米系数

假定三维空间中的位置可由一组数 $\{q_i, i=1,2,3\}$ 确定，这组数可以是长度，也可以是其他量，如角度等，那么这组数就称为广义坐标。固定三个广义坐标中的任意两个，变动剩下的一个而得到的曲线称为坐标线。显然，在三维空间中，过一点可以作三条坐标线。如果在一种广义坐标系中，三条坐标线总是相互正交，就称该坐标系为正交曲线坐标系。显然，直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系都属于正交曲线坐标系。

在正交曲线坐标系中，沿 q_i坐标线的长度微元可写为 $\mathrm{d}l_i = h_i \mathrm{d}q_i$，其中 h_i称为拉米(Lamé)系数或度规因子，它们可以是常数，也可以与 $q_j(j\neq i)$有关。下面是三种常用坐标系中的广义坐标与拉米系数。

直角坐标系：

$$q_1=x,\quad q_2=y,\quad q_3=z;$$

$$\begin{cases} dl_1=dx, & dl_2=dy, & dl_3=dz \\ h_1=1, & h_2=1, & h_3=1 \end{cases} \tag{1-6-1}$$

圆柱坐标系：

$$q_1=\rho,\quad q_2=\varphi,\quad q_3=z;$$

$$\begin{cases} dl_1=d\rho, & dl_2=\rho d\varphi, & dl_3=dz \\ h_1=1, & h_2=\rho, & h_3=1 \end{cases} \tag{1-6-2}$$

球坐标系：

$$q_1=r,\quad q_2=\theta,\quad q_3=\varphi$$

$$\begin{cases} dl_1=dr, & dl_2=rd\theta, & dl_3=r\sin\theta d\varphi \\ h_1=1, & h_2=r, & h_3=r\sin\theta \end{cases} \tag{1-6-3}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在正交曲线坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{A}(q_1,q_2,q_3)=\boldsymbol{e}_1A_1+\boldsymbol{e}_2A_3+\boldsymbol{e}_3A_3 \tag{1-6-4}$$

其中，$\boldsymbol{e}_i$是在点(q_1,q_2,q_3)沿 q_i方向的单位矢，一般是空间中的变矢量。算符 ∇ 的表达式为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial l_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial l_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial l_3} \tag{1-6-5}$$

把 $dl_i=h_i dq_i$代入式(1-6-5)，则有

$$\nabla=\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \tag{1-6-6}$$

下面写出梯度、散度和旋度在一般正交曲线坐标系中的表达式。

1.6.2　正交曲线坐标系中的梯度

按梯度的定义，标量场 ϕ 的梯度应为

$$\nabla\phi=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial\phi}{\partial l_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial\phi}{\partial l_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial\phi}{\partial l_3}$$

其中，$\boldsymbol{e}_i$为在点(q_1,q_2,q_3)沿 q_i方向的单位矢。把 $dl_i=h_i dq_i$代入上式，则有

$$\nabla\phi=\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3} \tag{1-6-7}$$

注意，各 $\boldsymbol{e}_i$的方向是随点的位置的变化而变化的。

1.6.3　正交曲线坐标系中的散度

根据散度的定义式(1-2-4)，考虑矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在图 1-6-1 中的小闭合曲面 S 上的通量。该曲面的一个顶点在(q_1,q_2,q_3)，三条棱的长度分别为 h_1dq_1、h_2dq_2、h_3dq_3。

由图可见，通过坐标面 q_1的通量是

$$[-A_1h_2h_3dq_2dq_3]_{q_1}$$

而通过坐标面 q_1+dq_1的通量是

$$[A_1h_2h_3dq_2dq_3]_{q_1+dq_1}$$

同样可以写出通过其他四个面的通量。于是

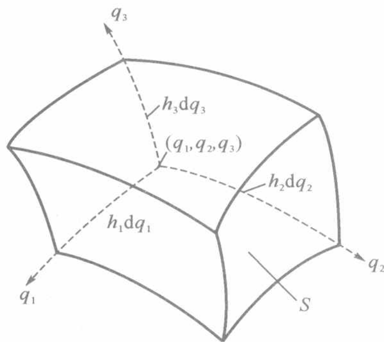


图 1-6-1　闭合曲面 S 的 6 个坐标面

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=[A_1h_2h_3\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3]_{q_1+\mathrm{d}q_1}-[A_1h_2h_3\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3]_{q_1}+[A_2h_3h_1\mathrm{d}q_3\mathrm{d}q_1]_{q_2+\mathrm{d}q_2}-$$

$$[A_2h_3h_1\mathrm{d}q_3\mathrm{d}q_1]_{q_2}+[A_3h_1h_2\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2]_{q_3+\mathrm{d}q_3}-[A_3h_1h_2\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2]_{q_3}$$

$$=\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3)\mathrm{d}q_1+\mathrm{d}q_3\mathrm{d}q_1\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_3h_1)\mathrm{d}q_2+\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\mathrm{d}q_3$$

将此式和 $\mathrm{d}V=h_1h_2h_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$ 代入式(1-2-4)，即得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right] \tag{1-6-8}$$

此即散度在正交曲线坐标系中的计算公式。

这里应当注意，h_2、h_3 有可能是 q_1 的函数，例如在圆柱坐标系和球坐标系中就是这样，故不能随便把它们从对 q_1 的求导中提出。其他两个导数也一样。

把 $\nabla\phi$ 看做 $\boldsymbol{A}$，把式(1-6-7)代入式(1-6-8)，又可得到

$$\nabla^2\phi=\nabla\cdot\nabla\phi$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)\right] \tag{1-6-9}$$

把式(1-6-1)～式(1-6-3)用于式(1-6-7)～式(1-6-9)，即可得到前面已导出的 $\nabla\phi$、$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和 $\nabla^2\phi$ 在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表达式。

1.6.4 正交曲线坐标系中的旋度

根据旋度的定义式(1-3-1)，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的分量应为

$$[\nabla\times\boldsymbol{A}]_1=\lim_{\Delta S_1\to 0}\frac{1}{\Delta S_1}\oint_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其中，C_1 是与 $\boldsymbol{e}_1$ 垂直并成右手螺旋关系的回路，ΔS_1 是 C_1 所围的面积，如图 1-6-2 所示。由图可见

$$\oint_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A_2h_2\mathrm{d}q_2+\left(A_3+\frac{\partial A_3}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2\right)\left(h_3+\frac{\partial h_3}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2\right)\mathrm{d}q_3+\left[-\left(A_2+\frac{\partial A_2}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3\right)\left(h_2+\frac{\partial h_2}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3\right)\mathrm{d}q_2\right]-A_3h_3\mathrm{d}q_3$$

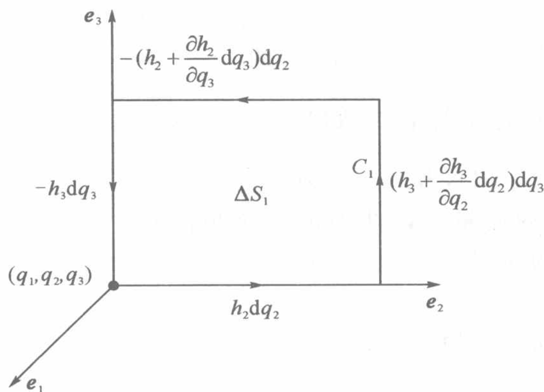


图 1-6-2 回路 C_1

这里已注意到 h_2、h_3 可能与 q_3 和 q_2 有关。把乘积项展开，略去与二阶无穷小量 $(\mathrm{d}q_2)^2$ 和 $(\mathrm{d}q_3)^2$ 相关的项，并利用 $\mathrm{d}S_1=h_2h_3\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$，即可得到

$$[\nabla\times\boldsymbol{A}]_1=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3)-\frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right] \tag{1-6-10}$$

同理可写出其他两个分量：

$$[\nabla\times\boldsymbol{A}]_2=\frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1h_1)-\frac{\partial}{\partial q_1}(A_3h_3)\right] \tag{1-6-11}$$

$$[\nabla\times\boldsymbol{A}]_3=\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2h_2)-\frac{\partial}{\partial q_2}(A_1h_1)\right] \tag{1-6-12}$$

综合式(1-6-10)～式(1-6-12)，可得

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_1[\nabla\times\boldsymbol{A}]_1+\boldsymbol{e}_2[\nabla\times\boldsymbol{A}]_2+\boldsymbol{e}_3[\nabla\times\boldsymbol{A}]_3 \tag{1-6-13}$$

或写成行列式

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \tag{1-6-14}$$

此即一般正交曲线坐标系中的旋度计算公式。

很容易验证，直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中旋度的计算公式皆是式(1-6-14)在相应坐标系中的特殊形式。

1.7 电磁场法向分量边界条件的非独立性

我们知道，在两种介质的交界面上，电磁场矢量必须满足边界条件。切向分量的边界条件是

$$\boldsymbol{E}_{1t}=\boldsymbol{E}_{2t},\ \boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{J}_s$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别为电场强度和磁场强度；法向分量的边界条件是

$$D_{2n}-D_{1n}=\rho_s,\ B_{1n}=B_{2n}$$

这里 D 和 B 分别为电位移和磁感应强度。式中 ρ_s 为自由电荷面密度，$\boldsymbol{J}_s$ 为传导电流面密度；下标中，1、2 代表两种介质中无限靠近的两点，t 和 n 分别表示切向和法向，法向单位矢 $\boldsymbol{e}_n$ 从点 1 指向点 2。

本节将证明，对于时谐场，上述两个关于法向分量的关系式不独立，它们可以由两个切向分量的关系式以及电荷守恒定律(或电流连续性方程)导出。

1.7.1 关于 $B_{1n}=B_{2n}$

对于角频率为 ω 的时谐场，$\partial/\partial t$ 可改为 $\mathrm{i}\omega$，从而有方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B} \tag{1-7-1}$$

把 ∇ 和 $\boldsymbol{E}$ 分解为切向矢量和法向矢量：$\nabla=\nabla_t+\nabla_n$，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t+\boldsymbol{E}_n$，则在介质 1 中很靠近界面的 a 点(a 点不在界面上，从而法向导数存在)，方程(1-7-1)可写为

$$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t+\nabla_t\times\boldsymbol{E}_n+\nabla_n\times\boldsymbol{E}_t+\nabla_n\times\boldsymbol{E}_n=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B} \tag{1-7-2}$$

记两个相互正交的切向单位矢分别为 $\boldsymbol{e}_b$ 和 $\boldsymbol{e}_c$，则左边第二项可展开为

$$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_n=(\nabla_t E_n)\times\boldsymbol{e}_n+E_n(\nabla_t\times\boldsymbol{e}_n)$$

$$=\left(\boldsymbol{e}_b\frac{\partial E_n}{\partial l_b}+\boldsymbol{e}_c\frac{\partial E_n}{\partial l_c}\right)\times\boldsymbol{e}_n+E_n\left(\boldsymbol{e}_b\times\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial l_b}+\boldsymbol{e}_c\times\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial l_c}\right)$$

这里、∂l_b和 ∂l_c分别为从a 点出发沿 $\boldsymbol{e}_b$和 $\boldsymbol{e}_c$方向的无限小位移。因为 $\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial l_b}$ 和 $\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial l_c}$ 分别平行于 $\boldsymbol{e}_b$和 $\boldsymbol{e}_c$，故最后一项为 0，于是 $\nabla_t\times\boldsymbol{E}_n$只有切向分量。

再看式(1-7-2)的左边第三项。由于 $\boldsymbol{E}_t$的单位矢 $\boldsymbol{e}_t$沿法向的方向导数 $\frac{\partial\boldsymbol{e}_t}{\partial l_n}=0$，故$\nabla_n\times\boldsymbol{e}_t=\boldsymbol{e}_n\times\frac{\partial\boldsymbol{e}_t}{\partial l_n}=0$。于是 $\nabla_n\times\boldsymbol{E}_t=(\nabla_n E_t)\times\boldsymbol{e}_t$，它也只有切向分量。

现在看式(1-7-2)的左边第四项。记沿法方向的无限小位移为 $\mathrm{d}l_n$，则有

$$\nabla_n\times\boldsymbol{E}_n=\left(\boldsymbol{e}_n\frac{\partial}{\partial l_n}\right)\times(E_n\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{e}_n\frac{\partial E_n}{\partial l_n}+\boldsymbol{e}_n\times\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial l_n}E_n$$

由于 $\boldsymbol{e}_n$沿法方向不变，故 $\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial l_n}=0$。于是由上式知$\nabla_n\times\boldsymbol{E}_n=0$。

综上可知，式(1-7-2)左边第四项为 0，而第二、第三项皆只有切向分量，因此，以 $\boldsymbol{e}_n$点乘式(1-7-2)两边后，即有

$$(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t)\cdot\boldsymbol{e}_n=-\mathrm{i}\omega B_n \tag{1-7-3}$$

对于介质 2 中很靠近 a 点的 b 点，式(1-7-3)当然也成立。将 a、b 两点的相应两式相减，有

$$[(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t)_a-(\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t)_b]\cdot\boldsymbol{e}_n=-\mathrm{i}\omega(B_{an}-B_{bn})$$

现在令 a、b 两点相互无限接近，并将 a、b 分别改记为 1、2，注意到 $\boldsymbol{E}_{1t}=\boldsymbol{E}_{2t}$在界面上处处成立，即可得到 $\nabla_t\times(\boldsymbol{E}_{1t}-\boldsymbol{E}_{2t})=0$。又因为 ω 任意，故得 $B_{1n}=B_{2n}$。

可见，由切向分量的边界条件 $\boldsymbol{E}_{1t}=\boldsymbol{E}_{2t}$，可以导出 $B_{1n}=B_{2n}$。

1.7.2 关于 $D_{2n}-D_{1n}=\rho_s$

记 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{H}_n$，则方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}$ 可写为

$$\nabla_t\times\boldsymbol{H}_t+\nabla_t\times\boldsymbol{H}_n+\nabla_n\times\boldsymbol{H}_t+\nabla_n\times\boldsymbol{H}_n=\boldsymbol{J}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D} \tag{1-7-4}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 为传导电流密度。以 $\boldsymbol{e}_n$点乘式(1-7-4)两边，则左边只剩下第一项。再利用恒等式 $\boldsymbol{H}_t=(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}_t)\times\boldsymbol{e}_n$，则可得到

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\left\{\nabla_t\times[(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}_t)\times\boldsymbol{e}_n]\right\}=J_n+\mathrm{i}\omega D_n$$

将此式用于 a、b 两点，并将所得两式相减，然后令 a、b 两点相互无限接近，则有

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\left\{\nabla_t\times[\boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{H}_{1t}-\boldsymbol{H}_{2t})\times\boldsymbol{e}_n]\right\}=(J_{1n}-J_{2n})+\mathrm{i}\omega(D_{1n}-D_{2n}) \tag{1-7-5}$$

因为 $\boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{J}_s$等价于 $\boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{H}_{2t}-\boldsymbol{H}_{1t})=\boldsymbol{J}_s$，故式(1-7-5)可写为

$$-\boldsymbol{e}_n\cdot[\nabla_t\times(\boldsymbol{J}_s\times\boldsymbol{e}_n)]=(J_{1n}-J_{2n})+\mathrm{i}\omega(D_{1n}-D_{2n}) \tag{1-7-6}$$

又因为

$$\nabla_t\times(\boldsymbol{J}_s\times\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{e}_n\cdot\nabla_t)\boldsymbol{J}_s-\boldsymbol{e}_n(\nabla_t\cdot\boldsymbol{J}_s)+\boldsymbol{J}_s(\nabla_t\cdot\boldsymbol{e}_n)-(\boldsymbol{J}_s\cdot\nabla_t)\boldsymbol{e}_n$$

而 $(\boldsymbol{e}_n\cdot\nabla_t)\boldsymbol{J}_s\equiv0$，$\boldsymbol{J}_s(\nabla_t\cdot\boldsymbol{e}_n)$ 沿切向，故式(1-7-6)可写为

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{J}_s+\boldsymbol{e}_n\cdot[(\boldsymbol{J}_s\cdot\nabla_t)\boldsymbol{e}_n]=(J_{1n}-J_{2n})+\mathrm{i}\omega(D_{1n}-D_{2n}) \tag{1-7-7}$$

等号左边第二项可写为

$$\boldsymbol{e}_n\cdot[(\boldsymbol{J}_s\cdot\nabla_t)\boldsymbol{e}_n]=\boldsymbol{e}_n\cdot\left(\boldsymbol{J}_{sb}\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial l_b}+J_{sc}\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial l_c}\right)$$

由于 $\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}}{\partial l_b}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}}{\partial l_c}$ 分别平行于 $\boldsymbol{e}_b$和 $\boldsymbol{e}_c$，皆与 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$垂直，故 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot[(\boldsymbol{J}_s\cdot\nabla_{\mathrm{t}})\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}]=0$。于是式(1-7-7)成为

$$\nabla_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{J}_s=(J_{1\mathrm{n}}-J_{2\mathrm{n}})+\mathrm{i}\omega(D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}}) \tag{1-7-8}$$

利用界面上的电流连续性方程

$$\nabla_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{J}_s+(J_{2\mathrm{n}}-J_{1\mathrm{n}})=-\mathrm{i}\omega\rho_s \tag{1-7-9}$$

式(1-7-8)可整理为

$$-\mathrm{i}\omega\rho_s=\mathrm{i}\omega(D_{1\mathrm{n}}-D_{2\mathrm{n}})$$

因为 ω 任意，于是有 $D_{2\mathrm{n}}-D_{1\mathrm{n}}=\rho_s$。

可见，由切向分量的边界条件 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{J}_s$，以及电流连续性方程(1-7-9)，可以导出 $D_{2\mathrm{n}}-D_{1\mathrm{n}}=\rho_s$。

1.8 并矢及其代数运算

并矢(dyad)在电磁场分析中有重要的应用。本节介绍并矢的定义及其主要代数运算法则，并给出一些常用的公式。在此基础上进一步介绍并矢的微分运算和积分运算，这是下一节的内容。

1.8.1 并矢

两个矢量按一定顺序连着写在一起就构成并矢。在三维空间中，若

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{b}=\sum_{j=1}^{3}b_j\boldsymbol{e}_j$$

$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$为三个相互正交的单位矢，则规定按“$\boldsymbol{a}$ 左 $\boldsymbol{b}$ 右”顺序构成的并矢为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$：

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{ab}\equiv\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1-8-1}$$

其中，a_ib_j是 a_i与 b_j的乘积。显然，对 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$而言，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的排列次序不可随意颠倒，即一般情况下，$\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba}$。

记 $A_{ij}=a_ib_j$，则式(1-8-1)又可写为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=A_{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+A_{12}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+A_{13}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3+A_{21}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1+A_{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+A_{23}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+A_{31}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1+A_{32}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2+A_{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1-8-2}$$

或写为矩阵乘积的形式：

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} \tag{1-8-3}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} \tag{1-8-4}$$

称为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$的矩阵。两个并矢相等，即意味着它们的全体矩阵元一一对应相等。

并矢还可以由多个矢量构成，三个矢量的并矢称为三阶并矢，四个矢量的并矢称为四阶并矢，等等。

并矢本身并无实际的物理意义，引入它只是为了简化某些算式的书写。例如在各向异性介质（如晶体）中，电位移 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的各直角分量之间有如下关系：

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{1-8-5}$$

式中的 3×3 阶矩阵称为介电常数张量。式(1-8-5)写起来很麻烦，但若引入下面的二阶并矢：

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \varepsilon_{xy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y + \varepsilon_{xz}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z + \varepsilon_{yx}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x + \varepsilon_{yy}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y + \varepsilon_{yz}\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z + \varepsilon_{zx}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_x + \varepsilon_{zy}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_y + \varepsilon_{zz}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-8-6}$$

则按并矢的乘法运算规则（见 1.8.4 节），式(1-8-5)就可简洁地表示为

$$\boldsymbol{D} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1-8-7}$$

在辐射问题中，则可以把电、磁矢量格林函数合成为一个并矢格林函数，从而使场的分析得以简化。

1.8.2 并矢的行矢量表象和列矢量表象

矩阵乘积满足结合律，因此，式(1-8-3)既可写为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{A}_3 \tag{1-8-8}$$

其中，$\boldsymbol{A}_i$ 称为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$ 的行矢量：

$$\boldsymbol{A}_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\boldsymbol{e}_j \qquad (i=1,2,3) \tag{1-8-9}$$

也可写为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}} = (\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\widetilde{\boldsymbol{A}}_2\widetilde{\boldsymbol{A}}_3)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{A}}_1\boldsymbol{e}_1 + \widetilde{\boldsymbol{A}}_2\boldsymbol{e}_2 + \widetilde{\boldsymbol{A}}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1-8-10}$$

其中，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_j$ 称为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$ 的列矢量：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_j = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i A_{ij} \qquad (j=1,2,3) \tag{1-8-11}$$

式(1-8-8)和式(1-8-10)分别称为二阶并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$ 在行矢量表象和列矢量表象中的表示，两种表示等价。注意，行矢量表象中 $\boldsymbol{e}_i$ 在行矢量 $\boldsymbol{A}_i$ 的左边，而在列矢量表象中，$\boldsymbol{e}_j$ 则在列矢量 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_j$ 的右边。

另外还应注意，$\boldsymbol{A}_i$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 中的下标并不表示它们与 $\boldsymbol{e}_i$ 同方向。由此又知，不同下标的行矢量与行矢量之间、列矢量与列矢量之间一般不具有正交关系，即一般地有 $\boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{A}_j \neq 0$，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{A}}_j \neq 0$（当 $i \neq j$ 时）。

1.8.3 并矢的转置

并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{ab}$ 的转置定义为

$$\overleftrightarrow{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{ba} \tag{1-8-12}$$

把 $\boldsymbol{b}=\sum\limits_i b_i\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{a}=\sum\limits_j a_j\boldsymbol{e}_j$ 代入，则有

$$\overleftrightarrow{A}^{\mathrm{T}}=\sum_{i,j} b_i a_j \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1-8-13}$$

注意到 $A_{ij}=a_ib_j$，$b_ia_j=a_jb_i=A_{ji}$，式(1-8-13)可写为

$$\overleftrightarrow{A}^{\mathrm{T}}=\sum_{i,j} A_{ji}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1-8-14}$$

比较式(1-8-2)和式(1-8-14)，可见对并矢 $\overleftrightarrow{A}$作转置就是将其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作转置。

另外，根据式(1-8-8)和式(1-8-10)，式(1-8-14)还可写为

$$\overleftrightarrow{A}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}_i \quad 或 \quad \overleftrightarrow{A}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\widetilde{\boldsymbol{A}}_i \tag{1-8-15}$$

与式(1-8-8)和式(1-8-10)比较，可见对并矢作转置，也就是将其行矢量或列矢量与单位矢 $\boldsymbol{e}_i$ 互换位置。

1.8.4 并矢的代数运算

并矢的代数运算即加法和乘法。

① 加法

设 $\overleftrightarrow{A}=\sum\limits_{i,j}A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，$\overleftrightarrow{B}=\sum\limits_{i,j}B_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，则二者的加法规定为

$$\overleftrightarrow{A}+\overleftrightarrow{B}=\sum_{i,j}(A_{ij}+B_{ij})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1-8-16}$$

② 乘法

并矢的乘法与矢量的乘法一样，分为点积与叉积两种。规定乘法是紧靠乘号两边的矢量之间的运算〔双点积和双叉积除外，见式(1-8-29)和式(1-8-30)〕，即，若 $\overleftrightarrow{A}=\boldsymbol{ab}$，$\overleftrightarrow{B}=\boldsymbol{cd}$，则有

$$\overleftrightarrow{A}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}),\quad \boldsymbol{c}\cdot\overleftrightarrow{A}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \tag{1-8-17}$$

$$\overleftrightarrow{A}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),\quad \boldsymbol{c}\times\overleftrightarrow{A}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \tag{1-8-18}$$

$$\overleftrightarrow{A}\cdot\overleftrightarrow{B}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d},\quad \overleftrightarrow{A}\times\overleftrightarrow{B}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \tag{1-8-19}$$

可见，并矢与矢量二者的点积为矢量，叉积为并矢；而并矢与并矢二者的点积为并矢，叉积则为三阶并矢。

按上述规定，并矢本身隔离了其两边的乘法运算，故并矢两边的乘法运算不分先后，例如：

$$\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{A}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{A})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\overleftrightarrow{A}\times\boldsymbol{b}) \tag{1-8-20}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{A}\cdot\overleftrightarrow{B}=\boldsymbol{a}\cdot(\overleftrightarrow{A}\cdot\overleftrightarrow{B})=(\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{A})\cdot\overleftrightarrow{B} \tag{1-8-21}$$

等等。

对于点积而言，有一个重要的公式：

$$\overleftrightarrow{A}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\overleftrightarrow{A}^{\mathrm{T}} \tag{1-8-22}$$

证明如下：

$$\overleftrightarrow{A}\cdot\boldsymbol{c}=\sum_i\widetilde{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{c}=\sum_i c_i\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{c}\cdot\sum_i \boldsymbol{e}_i\quad\widetilde{\boldsymbol{A}}_i=\sum_i c_i\quad\widetilde{\boldsymbol{A}}_i=\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot c$$

证完。

根据上述乘法规则,可以证明以下公式:

$$\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}\tag{1-8-23}$$

$$(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{a})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{B}}=\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{B}})\tag{1-8-24}$$

$$(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ba})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{c}\tag{1-8-25}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})=\boldsymbol{ba}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}-\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\tag{1-8-26}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})\tag{1-8-27}$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{B}})=-(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{B}}\tag{1-8-28}$$

下面证明式(1-8-27)和式(1-8-28)。

由矢量恒等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$,令 $\boldsymbol{c}=\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$($i=1,2,3$),有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_i=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)$$

在式中各项的右边放置 $\boldsymbol{e}_i$,与 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$构成并矢 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{e}_i$,然后对 i 求和,即得式(1-8-27)。

由式(1-8-27)中的 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})$ 以及式(1-8-22),又可以写出:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{a}\times\widetilde{\boldsymbol{B}}_i)=-(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}}_i$$

两边右置 $\boldsymbol{e}_i$,然后对 i 求和,即得式(1-8-28)。

式(1-8-23)～式(1-8-26)的证明留给读者练习。

除前述的点积和叉积外,并矢还有双点积和双叉积,这是两并矢中位置相同的矢量之间进行的运算。

双点积定义为

$$(\boldsymbol{ab}):(\boldsymbol{cd})\equiv(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\tag{1-8-29}$$

等号右边是两个标量的乘积,仍是标量。

双叉积定义为

$$(\boldsymbol{ab})\overset{\times}{\times}(\boldsymbol{cd})\equiv(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})\tag{1-8-30}$$

等号右边仍是并矢,其左、右矢量分别是两个相乘并矢的左、右矢量的叉积。

1.8.5 几种特别的并矢

下面介绍的几种并矢在理论分析中有重要的应用。

① 对称并矢

若 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$对任意非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 都成立,则 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$ 为对称并矢。对称并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$ 满足

$$A_{ij}=A_{ji}\tag{1-8-31}$$

这是因为,按 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$ 的行矢量表象,有

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{a}=\sum_j\left(\sum_i \boldsymbol{e}_iA_{ij}\right)\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{a}=\sum_i\boldsymbol{e}_i\sum_j A_{ij}a_j$$

而按 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$的列矢量表象,则又有

$$\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\sum_i a_i\sum_j A_{ij}\boldsymbol{e}_j=\sum_i\sum_j a_iA_{ij}\boldsymbol{e}_j=\sum_i\left(\sum_j a_jA_{ji}\right)\boldsymbol{e}_i$$

最后一步交换了 i 和 j。比较两式，因为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$，故两式右边对 j 的求和应当相等。注意到 a_j 任意，故可断定 $A_{ij}=A_{ji}$。

由式(1-8-31)可知，对称并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$满足 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$。

② 反对称并矢

若 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$对任意非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 都成立，则 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$为反对称并矢。反对称并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$满足

$$A_{ij}=-A_{ji},\qquad A_{ii}=0 \tag{1-8-32}$$

式(1-8-32)的证明与式(1-8-31)的证明类似，不再重复。

显然，反对称并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$满足 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=-\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$。

③ 单位并矢

单位并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ 的矩阵是单位矩阵，其矩阵元为

$$I_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & (i=j)\\ 0, & (i\neq j)\end{cases} \tag{1-8-33}$$

其中 δ_{ij} 称为克龙尼克(Kronecker)符号。

显然，$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ 属于对称并矢。

在直角坐标系中

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-8-34}$$

易于看出，对任意矢量 $\boldsymbol{a}$，都有

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{a} \tag{1-8-35}$$

故单位并矢也称恒等并矢。

并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$的迹定义为其矩阵的对角元素之和，用 $|\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}|$ 表示，即

$$|\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}|=\sum_{i=1}^{3}A_{ii} \tag{1-8-36}$$

显然，单位并矢的迹 $|\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}|=3$。

单位并矢有下面的叉积公式：

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} \tag{1-8-37}$$

$$(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{a})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}} \tag{1-8-38}$$

$$(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{1-8-39}$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{ba}-\boldsymbol{ab} \tag{1-8-40}$$

下面只证明式(1-8-40)，其他各式证明方法类似，不必重复。

式(1-8-40)的证明：

设 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{ef}$，则

$$\overleftrightarrow{I}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}[\boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]=\boldsymbol{e}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{b}]$$
$$=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{e}\boldsymbol{b}=\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

证完。最后一步利用了 $\overleftrightarrow{I}^{\mathrm{T}}=\overleftrightarrow{I}$。

1.9 并矢的微分与积分

1.9.1 并矢的微分运算

设并矢 $\overleftrightarrow{A}(t)=\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}(t)$，按导数的定义，有

$$\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)]\boldsymbol{b}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t)[\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{b}(t)]}{\Delta t}$$
$$=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} \tag{1-9-1}$$

可见并矢的导数或微分仍为并矢，运算法则与普通函数乘积的微分运算相同。

引入并矢后，矢量函数也可以有“梯度”：矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 的梯度 $\nabla\boldsymbol{a}$ 是并矢，在直角坐标系中

$$\nabla\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z} \tag{1-9-2}$$

但应注意，矢量函数的梯度不具有标量函数的梯度那样的意义，二者只是在形式上可以类比而已。把 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_xa_x+\boldsymbol{e}_ya_y+\boldsymbol{e}_za_z$ 代入式(1-9-2)，因为 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 为常矢，故式(1-9-2)又可写为

$$\nabla\boldsymbol{a}=\nabla(\boldsymbol{e}_xa_x+\boldsymbol{e}_ya_y+\boldsymbol{e}_za_z)=\nabla a_x\boldsymbol{e}_x+\nabla a_y\boldsymbol{e}_y+\nabla a_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-9-3}$$

注意，最后一式中，各单位矢必须放在右边。

特别地，对 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_xx+\boldsymbol{e}_yy+\boldsymbol{e}_zz$，按式(1-9-3)，就有

$$\nabla\boldsymbol{r}=\nabla x\boldsymbol{e}_x+\nabla y\boldsymbol{e}_y+\nabla z\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z=\overleftrightarrow{I} \tag{1-9-4}$$

对并矢也可以进行散度和旋度运算。关于这些有下面的运算公式：

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{A}=(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_x)\boldsymbol{e}_x+(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_y)\boldsymbol{e}_y+(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_z)\boldsymbol{e}_z$$
$$=\frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial z} \tag{1-9-5}$$

$$\nabla\times\overleftrightarrow{A}=(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_x)\boldsymbol{e}_x+(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_y)\boldsymbol{e}_y+(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_z)\boldsymbol{e}_z$$
$$=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right) \tag{1-9-6}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$（$i=x,y,z$）分别为 $\overleftrightarrow{A}$ 的行矢量和列矢量。

式(1-9-5)的证明很简单，不再赘述。这里只证明式(1-9-6)。

利用 $\overleftrightarrow{A}=\sum_i\widetilde{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{e}_i$，注意到 $\boldsymbol{e}_i$（$i=x,y,z$）为常矢，$\nabla\times\boldsymbol{e}_i=0$，故有

$$\nabla\times\overleftrightarrow{A}=\sum_i(\nabla\times\widetilde{A}_i)e_i=\sum_i\begin{vmatrix}e_x & e_y & e_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_{xi} & A_{yi} & A_{zi}\end{vmatrix}e_i$$

$$=\sum_i\left[e_x\left(\frac{\partial A_{zi}}{\partial y}-\frac{\partial A_{yi}}{\partial z}\right)+e_y\left(\frac{\partial A_{xi}}{\partial z}-\frac{\partial A_{zi}}{\partial x}\right)+e_z\left(\frac{\partial A_{yi}}{\partial x}-\frac{\partial A_{xi}}{\partial y}\right)\right]e_i$$

因为

$$\sum_i e_x\left(\frac{\partial A_{zi}}{\partial y}-\frac{\partial A_{yi}}{\partial z}\right)e_i=e_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\sum_i A_{zi}e_i-\frac{\partial}{\partial z}\sum_i A_{yi}e_i\right)=e_x\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)$$

$$\sum_i e_y\left(\frac{\partial A_{xi}}{\partial z}-\frac{\partial A_{zi}}{\partial x}\right)e_i=e_y\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)$$

$$\sum_i e_z\left(\frac{\partial A_{yi}}{\partial x}-\frac{\partial A_{xi}}{\partial y}\right)e_i=e_z\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right)$$

于是有式(1-9-6)。证完。

另外还可有

$$\nabla^2\overleftrightarrow{A}=\frac{\partial^2\overleftrightarrow{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overleftrightarrow{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overleftrightarrow{A}}{\partial z^2}=\nabla\nabla\cdot\overleftrightarrow{A}-\nabla\times\nabla\times\overleftrightarrow{A} \tag{1-9-7}$$

证明方法与前面类似，故从略。

1.9.2 并矢的积分运算

并矢的积分与一般标量函数和矢量函数的积分定义相同。以面积分为例：

$$\iint_S\overleftrightarrow{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\lim_{\Delta S\to 0}\sum\overleftrightarrow{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{1-9-8}$$

下面给出几个常用的并矢积分公式：

$$\iiint_V\nabla\cdot\overleftrightarrow{A}dV=\oiint_S e_n\cdot\overleftrightarrow{A}dS \tag{1-9-9}$$

$$\iiint\nabla\times\overleftrightarrow{A}dV=\oiint_S e_n\times\overleftrightarrow{A}dS \tag{1-9-10}$$

$$\iiint_V(\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\overleftrightarrow{B}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\nabla\times\overleftrightarrow{B})dV=\oiint_S(\boldsymbol{a}\times\nabla\times\overleftrightarrow{B})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-9-11}$$

$$\iiint_V[(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\overleftrightarrow{A}-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\nabla\times\overleftrightarrow{A})]dV$$
$$=\oiint_S[(e_n\times\boldsymbol{a})\cdot\nabla\times\overleftrightarrow{A}+(e_n\times\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\overleftrightarrow{A}]d\boldsymbol{S} \tag{1-9-12}$$

以上各式中，e_n为闭曲面 S 的外法向单位矢，V 为 S 所围的空间区域。

此外还有

$$\oint_C d\boldsymbol{l}\cdot\overleftrightarrow{A}=\iint_S e_n\cdot\nabla\times\overleftrightarrow{A}dS \tag{1-9-13}$$

这里 C 为曲面 S 的周界线，e_n为曲面 S 的法向单位矢，与 C 的绕向成右手螺旋。

上面这些公式都可以由相应的矢量积分公式导出。以式(1-9-13)为例：

由斯托克斯定理 $\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，取其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $\overleftrightarrow{A}$的列矢量 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i(\ i=1,2,3\ )$，则有

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_i=\iint_S \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i\mathrm{d}S$$

等号两边右置 $\boldsymbol{e}_i$，然后对 i 求和，即得式(1-9-13)。这里需要说明的是，上面把 $(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 写成 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\mathrm{d}S$，是为了保证在右置 $\boldsymbol{e}_i$后，点积只发生在矢量 $(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)$ 与 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$之间。

式(1-9-11) 和式(1-9-12) 依次被称为第一、第二并矢格林公式，它们可以用上面的方法由矢量格林公式导出：

在第一矢量格林公式

$$\iiint_V (\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{b})\mathrm{d}V=\oiint_S (\boldsymbol{a}\times\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

中，令 $\boldsymbol{b}=\widetilde{\boldsymbol{B}}_i$，有

$$\iiint_V (\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{B}}_i-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{B}}_i)\mathrm{d}V=\oiint_S \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\boldsymbol{a}\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{B}}_i)\mathrm{d}S$$

对各被积函数右置 $\boldsymbol{e}_i$，然后对 i 求和，即得式(1-9-11)。

在第二矢量格林公式

$$\iiint_V (\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{b})\mathrm{d}V=\oiint_S [(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times a)\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{b})\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}]\mathrm{d}S$$

中，令 $\boldsymbol{b}=\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$，并交换点积矢量的顺序，使每一项中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$都位于右边，有

$$\begin{aligned}&\iiint_V [(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_i-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i]\mathrm{d}V\\&=\oiint_S [(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{a})\cdot\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i-(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)]\mathrm{d}S\\&=\oiint_S [(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{a})\cdot\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_i+(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_i]\mathrm{d}S\end{aligned}$$

最后一步利用了公式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$。对各被积函数右置 $\boldsymbol{e}_i$，然后对 i 求和，即得式(1-9-12)。

1.9.3 正交曲线坐标系中的并矢微分公式

按行矢量表象，并矢 $\overleftrightarrow{A}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{A}_3$，它与矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{A}_3$ 的不同仅在于用行矢量 $\boldsymbol{A}_i$替换了后者中的各分量 A_i。因此，当对并矢作微分运算时，只要把矢量运算相应公式中的 A_i换成行矢量 $\boldsymbol{A}_i$就可以了。这样，由正交曲线坐标系中的公式可立即写出：

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\boldsymbol{A}_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(\boldsymbol{A}_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(\boldsymbol{A}_3h_1h_2)\right]\tag{1-9-14}$$

$$\nabla\times\overleftrightarrow{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1\boldsymbol{A}_1 & h_2\boldsymbol{A}_2 & h_3\boldsymbol{A}_3\end{vmatrix}\tag{1-9-15}$$

例如，在圆柱坐标系中，$\overleftrightarrow{A}=e_\rho A_\rho+e_\varphi A_\varphi+e_z A_z$，由式(1-4-7)和式(1-4-8)即可写出：

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(A_\rho\rho)+\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}(A_z\rho)\right]$$

$$=\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+\frac{A_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-9-16}$$

$$\nabla\times\overleftrightarrow{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} e_\rho & \rho e_\varphi & e_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \tag{1-9-17}$$

在球坐标系中，$\overleftrightarrow{A}=e_r A_r+e_\theta A_\theta+e_\varphi A_\varphi$，由式(1-5-9)和式(1-5-10)可写出：

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{1-9-18}$$

$$\nabla\times\overleftrightarrow{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} e_r & re_\theta & r\sin\theta e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \tag{1-9-19}$$

下面导出 $\nabla^2\overleftrightarrow{A}$在圆柱坐标系的计算公式。为此需先写出 $\nabla^2 A$ 的公式。

在圆柱坐标系中

$$\nabla^2 A=\nabla\cdot\left(e_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+e_\varphi\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}+e_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(e_\rho A_\rho+e_\varphi A_\varphi)+\nabla^2(e_z A_z)$$

因为

$$\nabla\cdot(e_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+e_\varphi\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}+e_z\frac{\partial}{\partial z})(e_\rho A_\rho)$$

$$=\nabla\cdot\left(e_\rho e_\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+e_\varphi e_\rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}+e_\varphi e_\varphi\frac{A_\rho}{\rho}+e_z e_\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right)$$

$$=e_\rho\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial\rho^2}+e_\rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+e_\varphi\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}+e_\rho\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial\varphi^2}-e_\rho\frac{A_\rho}{\rho^2}+e_\rho\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2}$$

$$=e_\rho\nabla^2 A_\rho-e_\rho\frac{A_\rho}{\rho^2}+e_\varphi\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\cdot\left(e_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+e_\varphi\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}+e_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(e_\varphi A_\varphi)$$

$$=\nabla\cdot\left(e_\rho e_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}+e_\varphi e_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}-e_\varphi e_\rho\frac{A_\varphi}{\rho}+e_z e_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)$$

$$=e_\varphi\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\rho^2}+e_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}-e_\rho\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+e_\varphi\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\varphi^2}-e_\varphi\frac{A_\varphi}{\rho^2}+e_\varphi\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2}$$

$$=e_\varphi\nabla^2 A_\varphi-e_\varphi\frac{A_\varphi}{\rho^2}-e_\rho\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^2(e_z A_z)=e_z\nabla^2 A_z$$

所以

$$\nabla^2 A=\left(\nabla^2 A_\rho-\frac{A_\rho}{\rho^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)e_\rho+\left(\nabla^2 A_\varphi-\frac{A_\varphi}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)e_\varphi+(\nabla^2 A_z)e_z \tag{1-9-20}$$

这样，对于并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{e}_\rho\boldsymbol{A}_\rho+\boldsymbol{e}_\varphi\boldsymbol{A}_\varphi+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{A}_z$，就有

$$\nabla^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_\rho-\frac{\boldsymbol{A}_\rho}{\rho^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\rho+\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_\varphi-\frac{\boldsymbol{A}_\varphi}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+(\nabla^2\boldsymbol{A}_z)\boldsymbol{e}_z \tag{1-9-21}$$

类似地可以导出，在球坐标系中

$$\begin{aligned}\nabla^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=&\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_r-\frac{2\boldsymbol{A}_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}\boldsymbol{A}_\theta-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r+\\&\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_r}{\partial\theta}-\frac{\boldsymbol{A}_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta+\\&\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\boldsymbol{A}_r}{\partial\varphi}-\frac{\boldsymbol{A}_\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{1-9-22}$$

1.9.4 常用并矢计算公式

为便于读者查阅，下面列出了一些较常用的并矢计算公式。

① 乘法公式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})-\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ba})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

$$(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{a})\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{ba}-\boldsymbol{ab}$$

② 微分公式

$$\nabla\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}=\nabla a_x\boldsymbol{e}_x+\nabla a_y\boldsymbol{e}_y+\nabla a_z\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\boldsymbol{r}=\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$$

$$\nabla(\boldsymbol{ab})=(\nabla\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}\nabla)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}-(\nabla\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$$

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{a}=0$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}&=(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_x)\boldsymbol{e}_x+(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_y)\boldsymbol{e}_y+(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}_z)\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}_x\nabla\cdot\boldsymbol{A}_x+\boldsymbol{e}_y\nabla\cdot\boldsymbol{A}_y+\boldsymbol{e}_z\nabla\cdot\boldsymbol{A}_z$$

$$\nabla^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\frac{\partial^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}}{\partial z^2}=\nabla\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}-\nabla\times\nabla\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}&=(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_x)\boldsymbol{e}_x+(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_y)\boldsymbol{e}_y+(\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_z)\boldsymbol{e}_z\\&=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\overleftrightarrow{A}=0$$

$$\nabla\cdot(\overleftrightarrow{A}\cdot\boldsymbol{a})=(\nabla\cdot\overleftrightarrow{A})\cdot\boldsymbol{a}+|\overleftrightarrow{A}\cdot\nabla\boldsymbol{a}|$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ba})=\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\overleftrightarrow{A})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\overleftrightarrow{A}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\overleftrightarrow{A}$$

$$\nabla\times(\overleftrightarrow{A}\times\boldsymbol{a})=(\nabla\times\overleftrightarrow{A})\times\boldsymbol{a}-\nabla\boldsymbol{a}\overset{\times}{\times}\overleftrightarrow{A}$$

$$\nabla\times(\phi\overleftrightarrow{I})=\nabla\phi\times\overleftrightarrow{I}$$

$$\nabla\times\nabla\times(\phi\overleftrightarrow{I})=\nabla\times(\nabla\phi\times\overleftrightarrow{I})=\nabla\nabla\phi-\nabla^2\phi\overleftrightarrow{I}$$

在圆柱坐标系中

$$\nabla^2\overleftrightarrow{A}=\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_\rho-\frac{\boldsymbol{A}_\rho}{\rho^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\rho+\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_\varphi-\frac{\boldsymbol{A}_\varphi}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+(\nabla^2\boldsymbol{A}_z)\boldsymbol{e}_z$$

在球坐标系中

$$\nabla^2\overleftrightarrow{A}=\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_r-\frac{2\boldsymbol{A}_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}\boldsymbol{A}_\theta-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r+$$
$$\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_r}{\partial\theta}-\frac{\boldsymbol{A}_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta+$$
$$\left(\nabla^2\boldsymbol{A}_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\boldsymbol{A}_r}{\partial\varphi}-\frac{\boldsymbol{A}_\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\boldsymbol{A}_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

③ 积分公式

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\overleftrightarrow{A}=\iint_S \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot\nabla\times\overleftrightarrow{A}\mathrm{d}S$$

$$\int_P^Q \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\nabla\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(Q)-\boldsymbol{a}(P)$$

$$\iiint_V \nabla\boldsymbol{a}\mathrm{d}V=\oiint_S \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\boldsymbol{a}\mathrm{d}S$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\overleftrightarrow{A}\mathrm{d}V=\oiint_S \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot\overleftrightarrow{A}\mathrm{d}S$$

$$\iiint \nabla\times\overleftrightarrow{A}\mathrm{d}V=\oiint_S \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\overleftrightarrow{A}\mathrm{d}S$$

$$\iiint_V (\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\overleftrightarrow{B}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\nabla\times\overleftrightarrow{B})\mathrm{d}V=\oiint_S (\boldsymbol{a}\times\nabla\times\overleftrightarrow{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\iiint_V [(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\overleftrightarrow{A}-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\nabla\times\overleftrightarrow{A})]\mathrm{d}V$$
$$=\oiint_S [(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{a})\cdot\nabla\times\overleftrightarrow{A}+(\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\overleftrightarrow{A}]\mathrm{d}S$$

习　题　1

1.1　证明式(1-2-13)。

1.2 若 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{k}$ 为常矢量，α 为常数，求矢量函数 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}e^{\alpha\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$的散度。

1.3 证明式(1-3-10)～式(1-3-12)和式(1-3-14)。

1.4 试证明 $\nabla\times(\boldsymbol{A}e^{\alpha\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\alpha\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}e^{\alpha\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{k}$ 为常矢量，α 为常数。

1.5 证明式(1-5-9)和式(1-5-10)。

1.6 分别在圆柱坐标系和球坐标系中求三个单位矢的旋度。

1.7 证明式(1-8-23)～式(1-8-26)。

第 2 章　复变函数概要

复变函数是电磁场分析的常用工具。本章首先简要回顾复变函数与解析函数的基本知识，然后介绍复积分（特别是割线积分）的方法、解析延拓的概念等知识，还要介绍 Γ 函数的一些常用公式，为后面的学习和应用作一些必要的准备。

2.1　复变函数与解析函数

2.1.1　复数　复向量　复变函数

xOy 平面上的点(x,y)可被表示为一个复数 z：$z=x+\mathrm{i}y$，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位。z 也可以表示为指数形式：$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 r 为 z 的模，θ 为 z 的辐角。

对复数而言，xOy 平面被称为复平面。既然点(x,y)可被表示为复数，那么，xOy 平面上的矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_xA_x+\boldsymbol{e}_yA_y$ 也同样可表示为复平面上的复向量：$A=A_x+\mathrm{i}A_y$。

以复数为自变量的函数称为复变函数。复变函数的值一般也为复数，可表示为

$$f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{2-1-1}$$

2.1.2　解析函数

设 h 为一复数，如图 2-1-1 所示。若对函数 $f(z)$，极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ 存在，且与 h 的辐角 φ 无关，即与由哪个方向趋近于 z 无关，则称 $f(z)$ 为 z 的解析函数，并定义此极限为 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$。

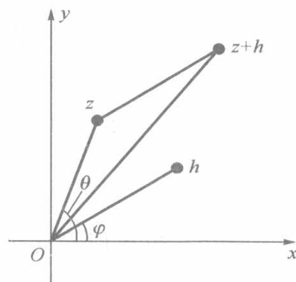


图 2-1-1　复数 z 与 h

简言之，若 $f(z)$ 在点 z_0 的导数存在，则 $f(z)$ 在 z_0 处解析。

例如，e^z 是解析函数，因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{z+h}-\mathrm{e}^z}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^z}{h}(\mathrm{e}^h-1)=\mathrm{e}^z\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{2!}+\cdots\right)=\mathrm{e}^z$$

显然该极限与 h 的辐角无关。

又例如，$f(z)=x-\mathrm{i}y=z^*$ 不是解析函数，因为

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{z^*+h^*-z^*}{h}=\frac{h^*}{h}=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}$$

其中 $\varphi=\arg h$。显然 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ 依赖于 φ。

2.1.3 柯西-黎曼条件

复函数 $f(z)$ 对应于两个实函数：

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{2-1-2}$$

若 $f(z)$ 解析，则按解析函数的定义，可写出

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_y=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \quad (即\ \mathrm{d}z=\mathrm{d}x) \tag{2-1-3}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_x=\frac{\partial u}{\mathrm{i}\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\mathrm{i}\partial y} \quad (即\ \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{d}y) \tag{2-1-4}$$

两式的左边应相等，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2-1-5}$$

此即柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件(简称 C-R 条件)。

由此又有

$$\nabla^2 u=0, \quad \nabla^2 v=0 \tag{2-1-6}$$

其中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维拉普拉斯(Laplace)算符。可见 u 和 v 是一对共轭的(即以 C-R 条件相联系的)二维调和函数。

2.1.4 解析函数的物理解释

将 C-R 条件，即式(2-1-5)的两式相乘，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\nabla u\cdot\nabla v=0 \tag{2-1-7}$$

这表明二维矢量 ∇u 和 ∇v 相互正交。因为 ∇u 和 ∇v 分别垂直于等值线族 $u(x,y)=$ 常数和 $v(x,y)=$ 常数，故知等值线族 $u(x,y)=c_1$ 和 $v(x,y)=c_2$ 也相互正交。

另外，在无电荷的静电场中，电势 ϕ 满足 $\nabla^2\phi=0$，故不妨将式(2-1-6)中的 u 看做电势。于是 $u(x,y)$ 的等值线族就是等势线族。由于电力线与等势线正交，故知 $v(x,y)$ 的等值线族就是电力线族。因此，解析函数在平面静电场问题中可被看做复势，它把电势和场强一起描绘了出来。

当然，也可以指定 $v(x,y)$ 为电势，这样 $u(x,y)$ 的等值线族就是电力线族。因此，一个解析函数可以解释为两种不同的平面静电场。例如，对于函数 $f(z)=\ln z=\ln r+\mathrm{i}\theta$，若令其实部代表电势 ϕ，即 $\phi=\ln r$，则电力线的方程即为 $\theta=$ 常数。场的分布如图 2-1-2 所示，它描写一根垂直于纸面的无限长的均匀带电直线周围的电场分布。

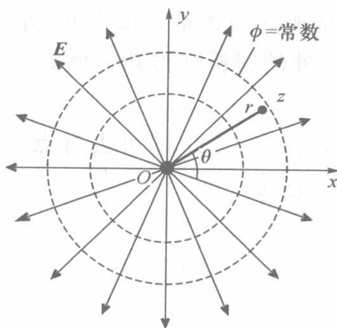


图 2.1.2 电力线 θ= 常数

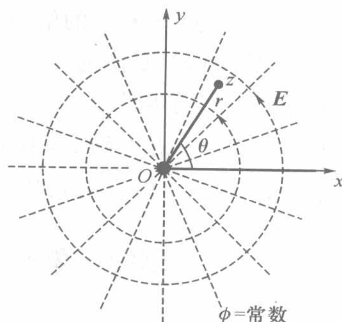


图 2.1.3 电力线 r= 常数

若令 $f(z)$ 的虚部代表电势，即 $\phi=\theta$，则电力线方程即为 $\ln r=$ 常数。场的分布如图 2-1-3 所示，它描写的是一张双面敷铜板，当上表面电势 $\phi=0$，而下表面电势 $\phi=2\pi$ 时，敷铜板边缘附近的电场分布。

由复势 $w=u+\mathrm{i}v$ 也可以得到二维电场强度矢量的复表达式。假定以实部 u 代表电势，则复场强为

$$E=E_x+\mathrm{i}E_y=-\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

最后一步利用了 C-R 条件。又因为 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$，故得

$$E=-\frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}z},\qquad |E|=\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| \tag{2-1-8}$$

此即电场强度矢量的复表达式。

2.2 复变函数的奇点

复平面上不解析的点称为奇点。在奇点，函数值或为无穷大，或不定。例如对于 $f(z)=(z-a)^{-1}$，$z=a$ 即为奇点，除 a 点外，$f(z)$ 处处解析。

奇点可分为极点、本性奇点和支点。

2.2.1 极点 本性奇点 孤立奇点

若

$$f(z)=\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{A_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_{-1}}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+\cdots \tag{2-2-1}$$

则 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点。一阶极点也被称为单极点。

若 $n=\infty$，则 a 为 $f(z)$ 的本性奇点。若 $f(z)$ 在 a 点外的任意小邻域中处处可导，则 a 为孤立奇点，否则为非孤立奇点。

例如，对于 $f(z)=\left(\sin\frac{1}{z}\right)^{-1}$，$z=0$ 是奇点。但 $z=\frac{1}{n\pi}$（n 为整数）也是奇点，它们以 $z=0$ 为极限点，故 $z=0$ 是非孤立奇点。

$f(z)$ 在无穷远点 $z\to\infty$ 的解析性(例如,是几阶的,是孤立的还是非孤立的,等等)可通过令 $z_1=1/z$,将 $f(z)$ 变换为 $F(z_1)$,由 $F(z_1)$ 在 $z_1=0$ 处的解析性得知。例如 $z=\infty$ 是 z^2 的二阶极点,是 e^z 的本性奇点。

若 $f(z)$ 在 $z=a$ 点不确定,但 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在,则称 a 点为 $f(z)$ 的可去奇点。对于可去奇点,可定义 $f(a)=\lim\limits_{z\to a}f(z)$,故可去奇点一般不按奇点对待。

2.2.2 支点 割线 黎曼面

支点产生于复变量辐角的多值性。

设 a 为任一复数。因为 $z-a=|z-a|e^{i(\varphi+2n\pi)}$($n$ 为 0 和整数),如图 2-2-1 所示,故有

$$(z-a)^{1/2}=\sqrt{|z-a|}e^{i(\varphi+2n\pi)/2}=\begin{cases}\sqrt{|z-a|}e^{i\varphi/2} & (\text{当 } n=0,2,4,\cdots)\\ -\sqrt{|z-a|}e^{i\varphi/2} & (\text{当 } n=1,3,5,\cdots)\end{cases} \tag{2-2-2}$$

每当变点 z 环绕 a 点一周,即 φ 增加或减少 2π,式(2-2-2)给出的函数值就改变一次。因此 a 点是 $(z-a)^{1/2}$ 的支点。

同样,因为

$$\ln(z-a)=\ln|z-a|+i(\varphi+2n\pi) \tag{2-2-3}$$

故 a 点也是 $\ln(z-a)$ 的支点。

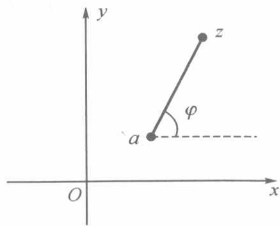


图 2-2-1 复数 $z-a$

若环绕 a 点 m 周后函数值复原,则称 a 点为函数的 $m-1$ 阶支点。因此,a 点是函数 $(z-a)^{1/2}$ 的一阶支点,是函数 $\ln(z-a)$ 的无穷阶支点。

为明确多值函数的取值范围,可在复平面上从支点开始向任一方向作一条割线,只要 z 不越过割线,$f(z)$ 就是单值的;而若越过割线,$f(z)$ 就进入另一个取值范围。形象地说,越过割线就进入了另一个复平面,它与前一复平面的辐角范围不同。这些以割线为交界线的假想的复平面称为黎曼(Riemann)面。在每一黎曼面上,$f(z)$ 都是单值的。

2.3 解析函数的有关定理

2.3.1 柯西定理

柯西(Cauchy)定理叙述如下:设 C 为复平面中的一条闭合回路,若 $f(z)$ 在 C 上和 C 内解析,则必有

$$\oint_C f(z)dz=0 \tag{2-3-1}$$

证 因为 $f(z)=u+iv$ 在 C 上解析,故 u、v 必在 C 上连续,于是可写出

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C(u+iv)(dx+idy)$$

$$=\oint_C (u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y) \tag{2-3-2}$$

利用斯托克斯公式,可写出

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=-\iint_S\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{i}\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-3-3}$$

因 $f(z)$ 在 C 内解析,u、v 满足 C-R 条件,故上式右边两个积分皆为 0。定理由此得证。

推论 在解析区域内,$\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$ 与积分路径无关。故只要路径不碰到奇点,则积分路径可以任意改变。

2.3.2 留数与留数定理

① 留数(residue)

若 $f(z)$ 在 a 点有 m 阶孤立极点:

$$f(z)=\frac{A_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{A_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_{-1}}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+\cdots \tag{2-3-4}$$

则系数 A_{-1} 即为 $f(z)$ 的留数,记为 $\mathrm{res}f(a)$。

② 留数的求法

因为

$$(z-a)^m f(z)=A_{-m}+A_{-(m-1)}(z-a)+\cdots+A_{-1}(z-a)^{m-1}+A_0(z-a)^m+\cdots \tag{2-3-5}$$

所以

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]=A_{-1}=\mathrm{res}f(a) \tag{2-3-6}$$

此即留数的计算公式。特别地,若 a 为单极点,即 $m=1$,则

$$\mathrm{res}f(a)=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \tag{2-3-7}$$

另外,若

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)} \tag{2-3-8}$$

其中,$P(a)\neq 0$, $Q(a)=0$,但 $Q'(a)\neq 0$ (撇号表示对 z 求一阶导数),则由式(2-3-8)有

$$\mathrm{res}f(a)=\lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)}\right]$$

$$=\lim_{z\to a}\left[\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(a)}{(z-a)}}\right]=\frac{P(a)}{Q'(a)} \tag{2-3-9}$$

【例 2-3-1】 求 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 在 $z=n\pi$ (n 为整数) 处的留数。

解 因为 $\sin n\pi=0$,而 $(\sin z)'=\cos z$ 在 $z=n\pi$ 处不为 0,故得

$$\mathrm{res}f(n\pi)=\lim_{z\to n\pi}\frac{1}{(\sin z)'}=\frac{1}{\cos n\pi}=(-1)^n$$

【例 2-3-2】 求 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ 在 $z=\mathrm{i}$ 处的留数。

解 显然 $z=\mathrm{i}$ 是 $f(z)$ 的三阶极点。按式(2-3-6)，有

$$\mathrm{res}f(\mathrm{i})=\frac{1}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{(z-\mathrm{i})^3}{(z^2+1)^3}\right]_{z=\mathrm{i}}=\frac{1}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^3}\right]_{z=\mathrm{i}}=-\mathrm{i}\,\frac{3}{16}$$

③ 留数定理

考察 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n$ 在逆时针回路 C 上的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$。

先设 C 内除孤立奇点 a 外再无其他奇点，于是 C 可改变为以 a 为心，半径为 r 的圆 C'，如图 2-3-1 所示。因为在 C'上，$z-a=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，$\mathrm{d}z=\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$，故有

$$\oint_{C'}(z-a)^n\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}r^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}0 & (n\neq-1)\\ 2\pi\mathrm{i} & (n=-1)\end{cases} \tag{2-3-10}$$

于是

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\oint_{C'}(z-a)^n\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}A_{-1} \tag{2-3-11}$$

或

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}f(a) \tag{2-3-12}$$

再考察 C 内有 m 个孤立奇点 $a_k(k=1,2,\cdots,m)$的情况。此时可作回路 $\widetilde{C}=C-\sum\limits_{k=1}^{m}C_k$，其中 C_k为包围奇点 a_k 的逆时针回路，如图 2-3-2 所示。于是 $\widetilde{C}$ 内无奇点。由柯西定理式(2-3-1)，即有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z-\sum_{k=1}^{m}\oint_{C_k}f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{2-3-13}$$

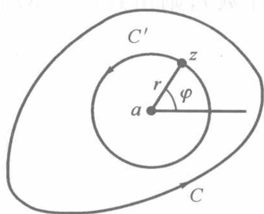


图 2-3-1 积分回路 C 和 C'

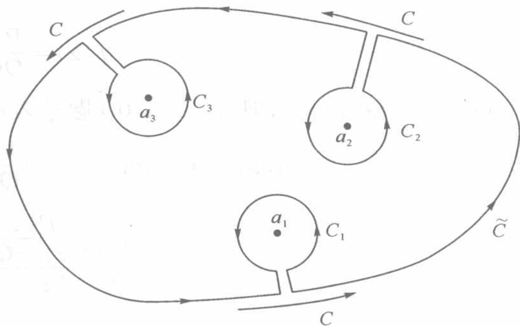


图 2-3-2 积分回路 C 和 $\widetilde{C}$

按式(2-3-12)，有 $\oint_{C_k}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}f(a_k)$，故有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{res}f(a_k) \tag{2-3-14}$$

此即留数定理。注意 C 的绕向规定为逆时针。

2.3.3 柯西积分公式

设有函数 $\phi(z)=\dfrac{f(z)}{z-a}$ 和回路 C，$f(z)$ 在 C 上和 C 内解析。于是，若 a 点在 C 内，则 a 为 $\phi(z)$ 在 C 内的单极点。根据留数定理式(2-3-14)，注意到 $\operatorname{res}\phi(a)=f(a)$，即有

$$\oint_C \phi(z)\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}\varphi(a)=2\pi\mathrm{i}f(a) \tag{2-3-15}$$

由此有

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z \tag{2-3-16}$$

或写为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{2-3-17}$$

此即柯西积分公式。

由式(2-3-17)又有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2-3-18}$$

2.3.4 泰勒(Taylor)定理

若 $f(z)$ 在圆域 $|z-a|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 可在此域内展开为绝对收敛且一致收敛的幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{2-3-19}$$

证 设 z 为圆域 $|z-a|<R$ 内的任意定点，则可将式(2-3-17)中的积分回路 C 取为 $|\zeta-a|=r<R$ 的圆周，它把 z 点包围在内，如图 2-3-3 所示。注意到

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{f(\zeta)}{\zeta-a-(z-a)}=\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)\left(1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)} \tag{2-3-20}$$

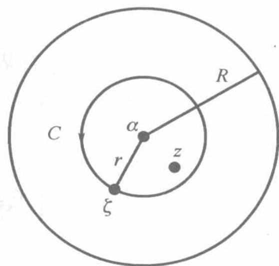


图 2-3-3 z 与积分回路 C

而对 C 上的任一点 ζ，有 $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|=\dfrac{|z-a|}{r}<1$，根据公式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad (|z|<1) \tag{2-3-21}$$

有

$$\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

该级数在 C 上一致收敛。因为 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}$ 在 C 上有界，故级数乘以 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}$ 后依然在 C 上一致收

敛。于是式(2-3-20)可表示为在 C 上一致收敛的级数：

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

代入式(2-3-17)，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

再利用式(2-3-18)，即得式(2-3-19)。

证完。

综合式(2-3-19)和式(2-3-18)，可知在圆域 $|z-a|<R$ 内，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\oint_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \tag{2-3-22}$$

2.3.5 刘维尔(Liouville)定理

若 $f(z)$ 处处解析且有界，则 $f(z)$ 为常数。

证 设 a 为复平面上的任一点。因为 $f(z)$ 解析，故按式(2-3-18)有

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta$$

取 C 为以 a 为圆心，半径为 $R\to\infty$ 的圆，则在 C 上有 $\zeta-a=Re^{i\varphi}$。于是上式成为

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{R^2e^{i2\varphi}}iRe^{i\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}f(\zeta)e^{-i\varphi}d\varphi$$

因为 $f(z)$ 有界，可设 $|f(\zeta)|\leqslant M$ (M 为有限常数)，于是有

$$|f'(a)|\leqslant\frac{M}{2\pi R}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{M}{R}\to 0$$

又因 a 任意，故对任一点 z，皆有 $f'(z)=0$，即 $f(z)=$常数。

证完。

按该定理，作为有界解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部和虚部，$u(z)$ 和 $v(z)$ 必皆为常数。因为在整个平面上它们处处满足 $\nabla^2u=0$，$\nabla^2v=0$，故可知处处无电荷的静电场必为均匀场。

2.4 利用留数定理求积分

留数定理在计算积分中有重要的应用。以下是几种常见的类型。

类型 1 $I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$，其中 R 是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函数。

令 $z=e^{i\theta}$，可将积分写为

$$I=\oint_C R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i},\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz} \tag{2-4-1}$$

其中，C 为以原点为圆心的单位圆(因为 $|z|=1$)，绕向逆时针。于是由留数定理即有

$$I=2\pi i\sum_{C内}\operatorname{res}f(z) \tag{2-4-2}$$

这里

$$f(z)=\frac{1}{\mathrm{i}z}R\left(\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}},\frac{z+z^{-1}}{2}\right) \tag{2-4-3}$$

类型 2 $I=\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)\mathrm{d}x$,其中 $Q(z)$ 为单值函数,它在实轴上只有有限个单极点,在上半平面除有限个奇点外处处解析。在整个上半平面,当 $z\to\infty$ 时,$zQ(z)$ 一致趋于 0。

暂设实轴上只有一个单极点 $z=a$,

则所求积分为

$$I=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^{R}Q(z)\mathrm{d}z\right]=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\oint_C-\int_{C_R}-\int_{C_\varepsilon}Q(z)\mathrm{d}z\right] \tag{2-4-4}$$

其中

$$\oint_C Q(z)\mathrm{d}z=\int_{-R}^{a-\varepsilon}+\int_{C_\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^{R}+\int_{C_R}Q(z)\mathrm{d}z \tag{2-4-5}$$

回路 C 如图 2-4-1 中所示。

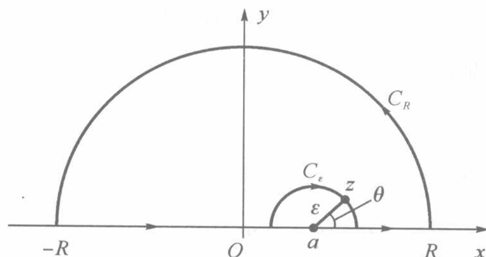


图 2-4-1 积分回路 C 与实轴上的极点 a

当 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$ 时,C 包围了上半平面中的全部极点,于是

$$\oint_C Q(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\,Q(z) \tag{2-4-6}$$

又因为 $R\to\infty$ 时,$zQ(z)$ 一致 $\to 0$,故

$$\int_{C_R}Q(z)\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}Q(z)\mathrm{i}z\mathrm{d}\theta\to 0 \tag{2-4-7}$$

现在看 C_ε上的积分。在 C_ε上,$z=a+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$。因为 a 是 $Q(z)$ 的单极点,故可将 $Q(z)$ 写为

$$Q(z)=\frac{A_{-1}}{z-a}+P(z)=\frac{\mathrm{res}\,Q(a)}{\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}+P(z) \tag{2-4-8}$$

其中,$P(z)$ 是 $Q(z)$ 的解析部分。于是,当 $\varepsilon\to 0$ 时,有

$$\int_{C_\varepsilon}Q(z)\mathrm{d}z=\int_{\pi}^{0}\left[\mathrm{res}\,Q(a)+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}P(z)\right]\mathrm{i}\mathrm{d}\theta=-\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}\,Q(a) \tag{2-4-9}$$

综合以上,可以得到

$$I=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\,Q(z)+\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}\,Q(a)$$

推广到实轴上有多个单极点的情况,则有

$$I=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\,Q(z)+\pi\mathrm{i}\sum_{\text{实轴}}\mathrm{res}\,Q(a) \tag{2-4-10}$$

【例 2-4-1】 求 $I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$。

解　注意到被积函数为偶函数，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$$

因为 $Q(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}=\dfrac{1}{(z-\mathrm{i})^3\,(z+\mathrm{i})^3}$ 在实轴上无极点，在上半平面仅有一个极点 $z=\mathrm{i}$。而 $\operatorname{res}Q(\mathrm{i})=-\mathrm{i}\,\dfrac{3}{16}$，见 2.3 节例 2-3-2，故得

$$I=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\,\frac{3}{16}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

【例 2-4-2】　求 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^3}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^3}$。

解　因为 $Q(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^3}=\dfrac{1}{(z-1)^3\,(z+1)^3}$ 在上半平面无极点，在实轴上有两个极点 $z=\pm1$，而 $\operatorname{res}Q(1)=\dfrac{3}{16}$，$\operatorname{res}Q(-1)=-\dfrac{3}{16}$，故 $I=0$。

还应特别注意一种情况，即

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x\qquad(m\ 为非零整数)$$

若 $Q(z)$ 在 $z\to\infty$ 处一致趋于零，则有

$$I=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}\displaystyle\sum_{上半平面}\operatorname{res}\left[Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\right](m>0)\\[2mm]2\pi\mathrm{i}\displaystyle\sum_{下半平面}\operatorname{res}\left[Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\right](m<0)\end{cases}+\pi\mathrm{i}\sum_{实轴}\operatorname{res}\left[Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\right]\qquad(2\text{-}4\text{-}11)$$

只需证明等号右边第一项。为此，先要证明以下约当(Jordan)引理：

若 $m>0$，且 $Q(z)$ 在上半平面 $z\to\infty$ 处一致趋于零，C_R 为以原点为心，半径为 $R\to\infty$ 的上半圆周(如图 2-4-1 所示)，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z=0\qquad(2\text{-}4\text{-}12)$$

证　在 C_R 上，$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。由假定知，对于给定的任意小量 $\varepsilon>0$，只要 R 足够大，总有 $|Q(z)|<\varepsilon$。于是有

$$I_{C_R}\equiv\left|\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_{C_R}|Q(z)|\,\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\,|\mathrm{d}z|$$
$$<\varepsilon R\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

这里已利用 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}|=\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}$，$|\mathrm{d}z|=R\mathrm{d}\theta$。

因为在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 上，有 $0\leqslant\dfrac{2}{\pi}\theta\leqslant\sin\theta$，故

$$I_{C_R}<2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}mR\theta}\mathrm{d}\theta=\varepsilon\frac{\pi}{m}(1-\mathrm{e}^{-mR})$$

令 $\varepsilon\to0$，即有 $I_{C_R}=0$。定理得证。

现在证明式(2-4-11)。若 $m>0$，根据上述约当引理，可给积分 I 添加路径 C_R，从而对积分的贡献来自实轴和上半平面的极点。这就证明了式(2-4-11)中 $m>0$ 的情况。

若 $m<0$，则只需在式(2-4-12)中令 $z=-z'$，使 e^{imz} 成为 $e^{i|m|z'}$，于是在 z' 的上半平面大圆弧上的积分为0。但 z' 的上半平面即 z 的下半平面，因此可在积分 I 中添加路径 C'_R，C'_R 是以原点为圆心，半径为 $R\to\infty$ 的下半圆周。从而对积分的贡献来自实轴和下半平面的极点。虽然现在积分回路成为顺时针，但由于 $dz=-dz'$，故积分结果符号不变。这就证明了式(2-4-11)中 $m<0$ 的情况。

【例 2-4-3】 求 $I=\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx$ 。

解 被积函数为偶函数，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{imx}dx$$

因为 $Q(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$ 在上半平面只有一个单极点 $z=a\mathrm{i}$，在 $z\to\infty$ 处一致趋于零，在实轴上无极点，故按式(2-4-11)有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{imx}dx=2\pi\mathrm{i}\,\underset{z=a\mathrm{i}}{\mathrm{res}}\left(\frac{z}{z^2+a^2}e^{imz}\right)=\pi\mathrm{i}e^{-ma}$$

所以

$$I=\frac{\pi}{2}e^{-ma}$$

类型 3 $I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}Q(x)dx$，其中 α 为非整数实数，$Q(z)$ 为单值函数，它在正实轴以外的全平面上除有限个单极点外处处解析。在 $0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi$ 中，当 $z\to 0$ 和 $z\to\infty$ 时，$|z^\alpha Q(z)|$ 一致 $\to 0$。

注意这一类型与前两类不同。由于 α 不是整数，当按复积分考虑时，$z=0$ 和 $z=\infty$ 都是 $z^{\alpha-1}$ 的支点。因此必须从 $z=0$ 到 $z=\infty$ 作一割线，以限定积分时 z 的取值。

取割线沿实轴，规定割线上岸 $\arg z=0$。先假定 $Q(z)$ 在正实轴上只有一个单极点 $z=a$。取闭曲线 C 如图 2-4-2 所示，其中 $R\to\infty$，r_1、r_2 皆 $\to 0$，使得 $Q(z)$ 在正实轴外的极点全在 C 内。于是有

$$I_C\equiv\oint_C z^{\alpha-1}Q(z)dz=2\pi\mathrm{i}\sum_{C内}\mathrm{res}[z^{\alpha-1}Q(z)] \tag{2-4-13}$$

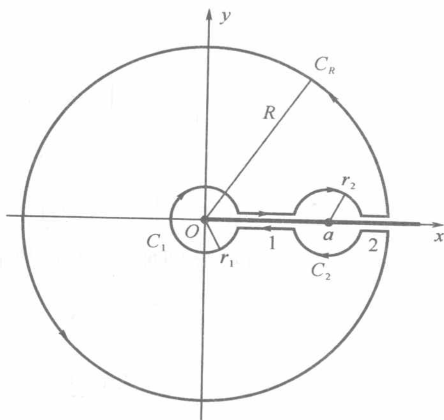


图 2-4-2 绕过割线和极点的积分回路 C

按图 2-4-2，I_C 可写为

$$I_C=\int_{1上}+\int_{C_2上}+\int_{2上}+\int_{C_R}+\int_{2下}+\int_{C_2下}+\int_{1下}+\int_{C_1} \tag{2-4-14}$$

下标分别注明了各段路径，“上”、“下”表示割线的上岸和下岸。下面分别讨论各段的积分。

首先，因为在 C_R 和 C_1 上，$|z^\alpha Q(z)|$ 一致 $\to 0$，与类型1的情况同理，有

$$\int_{C_R}=0,\qquad \int_{C_1}=0 \tag{2-4-15}$$

其次，在割线上岸，$z = xe^{i0} = x$，在割线下岸，$z = xe^{i2\pi}$，而 $Q(z)$ 单值，故在 $r_1 \to 0$、$r_2 \to 0$ 时，有

$$\int_{1上} + \int_{1下} = \int_0^a [x^{\alpha-1}Q(x) - (xe^{i2\pi})^{\alpha-1}Q(x)]dx$$
$$= (1 - e^{i2\pi\alpha})\int_0^a x^{\alpha-1}Q(x)dx \quad (2\text{-}4\text{-}16)$$

同理，在 $r_2 \to 0$、$R \to \infty$ 时有

$$\int_{2上} + \int_{2下} = (1 - e^{i2\pi\alpha})\int_a^\infty x^{\alpha-1}Q(x)dx \quad (2\text{-}4\text{-}17)$$

现在看 $I_{C_2上}$。在 C_2 的上半圆周，$z = a + \varepsilon e^{i\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。因为 $z = a$ 是 $Q(z)$ 的单极点，故可写出

$$Q(z) = \frac{\operatorname{res}Q(a)}{\varepsilon e^{i\theta}} + P(z) \quad (2\text{-}4\text{-}18)$$

其中，$P(z)$ 是 $Q(z)$ 的解析部分。于是在 C_2 的上半圆周有

$$z^{\alpha-1}Q(z)dz = (a + \varepsilon e^{i\theta})^{\alpha-1}\left[\frac{\operatorname{res}Q(a)}{\varepsilon e^{i\theta}} + P(z)\right]i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$
$$= (a + \varepsilon e^{i\theta})^{\alpha-1}[\operatorname{res}Q(a) + \varepsilon e^{i\theta}P(z)]id\theta$$

因为 $P(z)$ 解析，故当 $\varepsilon \to 0$ 时，该项对积分的贡献为 0，所以有

$$\int_{C_2上} = \int_\pi^0 a^{\alpha-1}\operatorname{res}Q(a)id\theta = -\pi i a^{\alpha-1}\operatorname{res}Q(a) \quad (2\text{-}4\text{-}19)$$

再看 $I_{C_2下}$。在 C_2 的下半圆周，$z = ae^{i2\pi} + \varepsilon e^{i\theta}$，$\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，

$$z^{\alpha-1}Q(z)dz = (ae^{i2\pi} + \varepsilon e^{i\theta})^{\alpha-1}\left[\frac{\operatorname{res}Q(a)}{\varepsilon e^{i\theta}} + P(z)\right]i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$
$$= (ae^{i2\pi} + \varepsilon e^{i\theta})^{\alpha-1}[\operatorname{res}Q(a) + \varepsilon e^{i\theta}P(z)]id\theta$$

于是当 $\varepsilon \to 0$ 时，有

$$\int_{C_2下} = \int_{2\pi}^\pi a^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}\operatorname{res}Q(a)id\theta = -\pi i a^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}\operatorname{res}Q(a) \quad (2\text{-}4\text{-}20)$$

综合式(2-4-15) ~ 式(2-4-17) 和式(2-4-19)、式(2-4-20)，可得

$$I_C = (1 - e^{i2\pi\alpha})\int_0^\infty x^{\alpha-1}Q(x)dx - \pi i(1 + e^{i2\pi\alpha})a^{\alpha-1}\operatorname{res}Q(a)$$

右边第一项中的积分即所求的 I，故有

$$I = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\alpha}}[I_C + \pi i(1 + e^{i2\pi\alpha})a^{\alpha-1}\operatorname{res}Q(a)]$$
$$= \frac{-e^{-i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}\left\{2\pi i\sum_{C内}\operatorname{res}[z^{\alpha-1}Q(z)] + \pi i e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha} + e^{i\pi\alpha})\operatorname*{res}_{z=a}[z^{\alpha-1}Q(z)]\right\}$$
$$= \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\sum_{C内}\operatorname{res}[(-z)^{\alpha-1}Q(z)] - \pi\cot\alpha\pi\operatorname*{res}_{z=a}[z^{\alpha-1}Q(z)] \quad (2\text{-}4\text{-}21)$$

上面最后一式利用了 $-e^{-i\pi\alpha} = (-1)^{\alpha-1}$。

若正实轴上有若干单极点，则式(2-4-21) 应改为

$$I = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\sum_{C内}\operatorname{res}[(-z)^{\alpha-1}Q(z)] - \pi\cot\alpha\pi\sum_{正实轴}\operatorname{res}[z^{\alpha-1}Q(z)] \quad (2\text{-}4\text{-}22)$$

【例 2-4-4】 证明欧拉(Euler) 积分公式

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

证　记 $Q(z)=\dfrac{1}{1+z}$，则 $Q(z)$ 只有一个单极点 $z=-1$，不在正实轴上。按式(2-4-22)即有

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\operatorname*{res}_{z=-1}\left[\frac{(-z)^{\alpha-1}}{1+z}\right]=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \tag{2-4-23}$$

得证。

应当说明，类型 2 和类型 3 皆属广义积分，本章所求的只是广义积分的柯西主值，而非一般值。主值存在时，一般值不一定存在。

2.5　解析延拓

解析延拓有重要的理论价值，微分方程解的适用范围常可利用解析延拓而得到推广。本节将首先介绍解析函数的唯一性定理，这是解析延拓的理论基础，然后介绍解析延拓的基本概念。解析延拓的方法有多种，本节只介绍利用幂级数进行解析延拓的方法，重在获得对解析延拓的感性认识。下一节将利用递推公式实现对 Γ 函数的解析延拓。

2.5.1　解析函数的唯一性定理

设 $f_2(z)$ 和 $f_1(z)$ 是区域 D 内的两个解析函数，在 D 内某点列 $\{z_k\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 上，$f_1(z_k)=f_2(z_k)$，而 $\{z_k\}$ 在 D 内至少有一个极限点，则

$$f_1(z)\equiv f_2(z)\qquad (z\in D)$$

证明从略。

由该定理可得以下推论：

推论 1　若 $f_2(z)$、$f_1(z)$ 在 D 内解析，且在其中某一点的邻域内(或某一曲线段上)二者相等，则

$$f_1(z)\equiv f_2(z)\qquad (z\in D)$$

推论 2　若 $f_2(z)$、$f_1(z)$ 在 D 内解析，且有 $f_1(a)=f_2(a)$，$f_1^{(n)}(a)=f_2^{(n)}(a)$，$(a\in D,$ $n=1,2,3,\cdots)$，则有

$$f_1(z)\equiv f_2(z)\qquad (z\in D)$$

2.5.2　解析延拓

解析函数常用积分或幂级数表示，这类表示一般只适用于一定的区域，超出此域便不能代表原解析函数。而且同一解析函数在不同区域内的表达式(展开式)形式也不同，例如函数

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\qquad (|z|<1) \tag{2-5-1}$$

和

$$f_2(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^{-n}\qquad (|z|>1) \tag{2-5-2}$$

分别在各自的定义域中代表函数

$$f(z)=1/(z+1)\qquad (z\neq -1)$$

如果我们只有解析函数 $f(z)$ 在某定义域 D_1 内的表达式，能否由此导出在更大区域 D_2 内的表达式？答案是肯定的，这是因为解析函数满足唯一性定理，故解析函数在解析域内各点的值之间有严格的约束关系。这种由适用于较小区域的函数表达式推演出适用于更大区域的函数表达式的过程称为解析延拓。

例如，函数

$$f_1(z)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t \tag{2-5-3}$$

在 $\mathrm{Re}\, z>0$ 处解析，$f_1(z)=1/z$。另一方面，函数 $f_2(z)=1/z$ 在 $z\neq 0$ 的全平面解析。由此知 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 在除原点外的整个复平面上的解析延拓。

一般地，设函数 $f_1(z)$ 在域 D_1 内解析，$f_2(z)$ 在域 D_2 内解析，D 为 D_1 和 D_2 的共有区域：$D=D_1\cap D_2$。若对 $z\in D$，总有 $f_2(z)=f_1(z)$，则称 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 在 D_2 区域中的解析延拓。当然，$f_1(z)$ 也是 $f_2(z)$ 在 D_1 区域中的解析延拓。

由此及前述推论 2，可知复变函数 e^z、$\sin z$ 和 $\cos z$ 分别是实函数 e^x、$\sin x$ 和 $\cos x$ 的解析延拓。由此还可推知，实三角函数的各关系式对于复三角函数同样成立。

2.5.3 幂级数的解析延拓

设 $f(z)$ 在某点 a_1 的邻域 D_1 内解析，则在 D_1 内，$f(z)$ 可表示为幂级数：

$$f(z)=f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n \quad (z\in D_1) \tag{2-5-4}$$

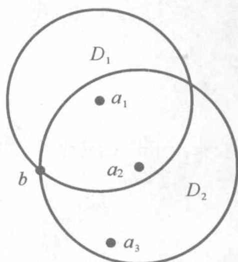


图 2-5-1 区域 D_1 和 D_2

若 b 为与 a_1 最近的奇点，则显然 $f_1(z)$ 的收敛半径为 $|b-a_1|$，如图 2-5-1 所示。

在 D_1 中取一点 a_2，由式(2-5-4)可得

$$f_1^{(m)}(a_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}(a_1)}{n!}m!\,(a_2-a_1)^{n-m} \tag{2-5-5}$$

因为 $f_1^{(m)}(a_2)$ 对全体 m 都存在，故可作函数

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}(a_2)}{n!}(z-a_2)^n \quad (z\in D_2) \tag{2-5-6}$$

这里 D_2 为以 a_2 为圆心，半径为 $|b-a_2|$ 的圆形区域，如图 2-5-1 所示。显然，$f_1(a_2)=f_2(a_2)$，$f_1^{(n)}(a_2)=f_2^{(n)}(a_2)$。因为 $a_2\in D_1\cap D_2$，由前述唯一性定理的推论 2 可知，对 $z\in D_1\cap D_2$，有 $f_1(z)\equiv f_2(z)$。从而 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 在 D_2 区域中的解析延拓。于是有

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z) & (z\in D_1) \\ f_2(z) & (z\in D_2) \end{cases}$$

这就得到了 $f(z)$ 在更大范围内的级数表达式。

同样地，在 D_2 中取另一点 a_3，又可由 $f_2(z)$ 构造出 $f_3(z)$ $(z\in D_3)$，显然 D_3 中也不包含奇点。

如此由一个幂级数开始，不断推演，使级数表示的定义域绕过奇点不断扩大，最终可得适用于整个复平面(除各奇点外)的级数表达式，这就是解析延拓。所得到的全体幂级数构成一个“完全解析函数”。

2.6 Γ 函数的解析延拓与 Γ 函数的常用公式

2.6.1 Γ 函数的解析延拓

在实数域中，Γ 函数定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x>0) \tag{2-6-1}$$

它在 $x>0$ 的实轴上收敛。现定义复变量函数：

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \tag{2-6-2}$$

因为 t^{z-1} 是多值函数，故规定在正实轴上 $\arg t=0$。在 $\mathrm{Re}\, z>0$ 时 $\Gamma(z)$ 解析（证明从略），故 $\Gamma(z)$ 是 $\Gamma(x)$ 在右半无限平面的解析延拓。

现将 $\Gamma(z)$ 延拓到左半平面去。由分部积分可写出

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z}dt=-e^{-t}t^{z}\Big|_0^{\infty}+z\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma(z) \tag{2-6-3}$$

因为 $\Gamma(z+1)$ 在 $\mathrm{Re}\, z>-1$ 解析，故由式(2-6-3)写出的

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1) \tag{2-6-4}$$

也在 $\mathrm{Re}\, z>-1$ 解析，但 $z=0$ 这一点除外。这样就把 $\Gamma(z)$ 延拓到了 $\mathrm{Re}\, z>-1$。

在式(2-6-4)中作变换 $z\to z+1$，又可得

$$\Gamma(z+1)=\frac{1}{z+1}\Gamma(z+2) \tag{2-6-5}$$

以此类推，可得以下递推关系：

$$\Gamma(z)=\frac{1}{(z)_n}\Gamma(z+n) \tag{2-6-6}$$

其中

$$(z)_n\equiv z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1) \tag{2-6-7}$$

式(2-6-6)的收敛域为 $\mathrm{Re}\, z>-n$，但实轴上的点 $z=-1,-2,\cdots,-(n-1)$ 除外。令 $n\to\infty$，就给出了定义在整个复平面上的 $\Gamma(z)$ 函数，它仅在负实轴上有一系列奇点 $z=-1,-2,\cdots$。这种解析延拓是利用函数的递推关系实现的。

由式(2-6-6)可知

$$(z)_0=\frac{\Gamma(z+0)}{\Gamma(z)}=1 \tag{2-6-8}$$

2.6.2 Γ 函数的常用公式

Γ 函数在第 5 章里有较多的应用，故这里顺便导出它的一些常用公式。

① 由公式(2-6-7)有

$$(1)_n\equiv 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(1+n-1)=n! \tag{2-6-9}$$

于是按式(2-6-6)，有

$$\Gamma(n+1)=n!\ \Gamma(1) \tag{2-6-10}$$

但按式(2-6-1)，有

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$$

故得

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{2-6-11}$$

② 设 $0<x<1$，则

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x)&=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s}s^{-x}\mathrm{d}s\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-(s+t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2-6-12}$$

记 $\xi=s+t,\ \eta=t/s\ (0\leqslant\xi,\eta<\infty)$，则有

$$s=\frac{\xi}{1+\eta},\qquad t=\frac{\xi\eta}{1+\eta} \tag{2-6-13}$$

按变换理论，有 $\mathrm{d}t\mathrm{d}s=J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$，其中 J 为雅可比(Jacobi)行列式：

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial s}{\partial\xi} & \dfrac{\partial s}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial t}{\partial\xi} & \dfrac{\partial t}{\partial\eta}\end{vmatrix}=\frac{\xi}{(1+\eta)^2} \tag{2-6-14}$$

由此，式(2-6-12)成为

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty} \eta^{x-1}\frac{\mathrm{d}\eta}{1+\eta}$$

上式右边第一个积分为1，第二个积分为欧拉积分，见式(2-4-23)，故得

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

因为 $\Gamma(x)$ 与 $\Gamma(z)$ 在实轴上相等，据解析函数的唯一性定理的推论1可知，上式对复函数 $\Gamma(z)$ 也成立，即有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{2-6-15}$$

③ 在式(2-6-15)中令 $z=\frac{1}{2}$，则有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{2-6-16}$$

④ 由式(2-6-6)和式(2-6-16)又可得

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)_n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)_n\sqrt{\pi} \tag{2-6-17}$$

因为

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}=\frac{(2n)!}{(2n)!!\ 2^n}=\frac{(2n)!}{n!\ 2^{2n}} \tag{2-6-18}$$

故

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!}{n!\ 2^{2n}}\sqrt{\pi} \tag{2-6-19}$$

习 题 2

2.1 证明 $f(z)=|z|$ 和 $f(z)=|z|^2$ 不是解析函数。

(提示：分别取 $h=\varepsilon$ 和 $h=\mathrm{i}\varepsilon$，比较 $\varepsilon\to 0$ 时两种极限的结果。)

2.2 利用斯托克斯定理，证明式(2-2-2)可写为式(2-2-3)。

2.3 求下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3x}{5-4\cos 2x}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1-a\cos x)^2}\quad(-1<a<1)$

2.4 求下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^n}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{-p}\mathrm{d}x}{1+2x\cos\lambda+x^2}\ (-1<p<1,\ -\pi<\lambda<\pi)$

2.5 已知某解析函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的级数表示为 $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}z^n$，求 $f(z)$ 在 $|z-\mathrm{i}|<\sqrt{2}$ 内的级数表示。

第3章　平面静电场问题的保角映射法

二维拉普拉斯(Laplace)方程和泊松(Poisson)方程加上边界条件，构成了平面静电场的定解问题。当边界条件较复杂时，直接求解会很困难。此时可利用保角映射，使边界条件变成我们熟悉的简单情况，以致方程的解(电势分布)可直接写出，然后对此解作逆映射，即可得到原区域中的电势分布。本章介绍保角映射的基本性质，以及一些基本的映射方法。

3.1　保角映射及其基本性质

3.1.1　保角映射

当给定 z 复平面上的一个点 $z(=x+\mathrm{i}y)$后，复函数

$$\zeta(z)=\xi(x,y)+\mathrm{i}\eta(x,y) \tag{3-1-1}$$

就确定了 ζ 复平面上的一个点 $\zeta(=\xi+\mathrm{i}\eta)$，从而$(x,y)$平面上的一个区域(或曲线)就对应于$(\xi,\eta)$平面上的一个区域(或曲线)。由此可知，一个复函数 $\zeta(z)$可以看成从 z 平面到 ζ 平面的映射。在映射中，点 z 称为原像点，点 $\zeta(z)$则称为 z 的像点。

如果一种映射能够使 ζ 平面中两曲线微元的夹角与原像曲线微元的夹角相同，则称此映射为保角映射，又称为共形映射(Conformal Mapping)。

3.1.2　保角映射的条件

设 z 平面上某点 z 处的曲线元 $\mathrm{d}z$ 在映射 $\zeta=\zeta(z)$之下对应于 ζ 平面中曲线元 $\mathrm{d}\zeta$。若在 z 处满足$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\neq 0$，则必有$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}=M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，或

$$\mathrm{d}\zeta=\mathrm{d}zM\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{3-1-2}$$

M 为实数。此式的几何意义是，曲线元 $\mathrm{d}z$ 在 ζ 平面中的映射 $\mathrm{d}\zeta$，其长度放大了 M 倍，辐角增加了 α。又若 $\zeta(z)$为解析函数，则在确定的 z 点，$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}$唯一，故 M、α 对此 z 点也唯一。因此，若有两曲线元 $\mathrm{d}z_1$ 和 $\mathrm{d}z_2$ 经过点 z，则有映射

$$d\zeta_1 = dz_1 M e^{i\alpha}, d\zeta_2 = dz_2 M e^{i\alpha} \tag{3-1-3}$$

两式相除，得

$$\left|\frac{d\zeta_1}{d\zeta_2}\right| e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \left|\frac{dz_1}{dz_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

从而 $\varphi_1 - \varphi_2 = \theta_1 - \theta_2$，这里 φ_1、φ_2 和 θ_1、θ_2 分别是 $d\zeta_1$、$d\zeta_2$ 和 dz_1、dz_2 的辐角。可见两曲线元的夹角在映射中保持不变。

由以上知，保角映射的前提是 $\zeta(z)$ 为解析函数，并且在所涉及的复区域内处处有 $\frac{d\zeta}{dz} \neq 0$。这也是 $\zeta = \zeta(z)$ 为保角映射的充要条件。换言之，若 $\frac{d\zeta}{dz} \neq 0$，则解析函数 $\zeta(z)$ 代表一个保角映射。

【例 3-1-1】 讨论 $\zeta(z) = z^2$ 的保角性。

解 由 $\zeta'(z) = 2z$，可知对 $z \neq 0$ 的各点，$\zeta(z)$ 皆保角。但在 $z = 0$ 处，$\zeta'(z) = 0$，$\zeta(z)$ 在此不是保角映射。

事实上，因 $\arg\zeta = 2\arg z$，故由 $z = 0$ 发出的夹角为 $\alpha_2 - \alpha_1$ $(\alpha_i = \arg z_i, i = 1, 2)$ 的两条射线被映射为由 $\zeta = 0$ 发出的两条射线，但这两条线的夹角为 $2(\alpha_2 - \alpha_1)$，显然映射在 $z = 0$ 不保角。

3.1.3 像与原像的对应性

一般的解析函数 $\zeta(z)$ 代表的变换不一定能保证像点与原像点一一对应，例如 $\zeta(z) = z^2$，像点 $\zeta = 1$ 对应于两个原像 $z = \pm 1$。

那么，在什么条件下，映射才是点对点一一对应的呢？

由微分学的有关理论可知，对于映射式(3-1-1)，若在点 $z_0 = x_0 + iy_0$，$\xi_0 = \xi(x_0, y_0)$ 和 $\eta_0 = \eta(x_0, y_0)$ 都存在，且 $\xi(x, y)$ 和 $\eta(x, y)$ 在 z_0 都有连续的偏导数，而映射的雅可比行列式

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{3-1-4}$$

在 z_0 不等于 0，则在 z_0 的邻域内，z 与 $\zeta(z)$ 是一一对应的。$J \neq 0$ 的点称为映射的常点，而 $J = 0$ 的点则为映射的奇点。

对于保角映射而言，$\zeta(z)$ 在所涉及的区域内是解析的，因此满足 C-R 条件：

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3-1-5}$$

故

$$J = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right] \tag{3-1-6}$$

注意到对于解析函数 $\zeta(z)$，有

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + i\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3-1-7}$$

故

$$J=\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|^2 \tag{3-1-8}$$

而前已指出，映射为保角的前提是$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\neq 0$，故在映射所涉及的区域内，处处有 $J\neq 0$。这就说明了，在保角映射中，像与原像是点对点一一对应的，或称双向单值对应的。

一个解析函数 $\zeta(z)$，若在某区域中的任意两不同点都有不同的值，则称其在该区域内是单叶的。这类似于一元函数中的严格单调函数。由于原像区域中各点都不同，故像点也各不相同。因此，保角映射中的解析函数必是单叶的。

总之，保角映射中，z 平面中的一个区域一定对应于 ζ 平面中的一个区域，而不会是一条曲线或一个点。

此外，保角映射还具有保连通的性质，即，若 z 平面中的区域 D 为单连通，则其像区域 D'也为单连通。这可用反证法证明如下。

假设 D'也为复连通，则可在 D'中作一光滑的闭曲线 L'，使之包围 D'的一个内边界，如图 3-1-1 所示。由于保角映射是双向单值对应的，故 L'在区域 D 中的原像 L 也为一光滑闭曲线。现令 L 连续收缩为一点，则 L'也应连续收缩为一点，但这显然不可能。这与保角映射的性质相矛盾，因此，D'必为单连通。

由此不难推知，若 D 为 n 连通区域，则 D'也为 n 连通区域。

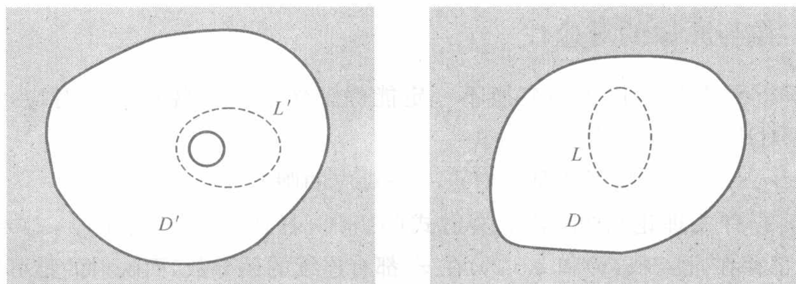


图 3-1-1　L'与其原像 L

3.1.4　边界对应定理

为得到 D 在 ζ 平面中的像 D'，显然只需将 D 的边界线 C 映射为 ζ 平面中的闭曲线 C'，C'就是 D'的边界线。但问题是，D'在 C'的内侧还是外侧？

对此有以下边界对应定理。

设 D 为单连通区域，其边界线为简单闭曲线 C，$\zeta(z)$在 D 内单叶解析，在 $\overline{D}$（$=D+C$）上连续。若 $\zeta(z)$将 C 双向单值地映射为简单闭曲线 C'，则 $\zeta(z)$必也将 D 双向单值地映射为 C'的内部区域 D'，这里两区域的边界线关于各自区域的绕行方向相同，即，若沿 C 的绕行方向，D 总在左边，则沿 C'的绕行方向，D'也总在左边。

证明参见《解析函数论基础》（陈方权等编，北京师范大学出版社，1987），这里从略。

也可以这样理解：从 C 上一点 z 出发，取两个微元 $\mathrm{d}z_1$ 和 $\mathrm{d}z_2$，$\mathrm{d}z_1$ 的终点在 C 上前方，$\mathrm{d}z_2$ 的终点在 D 内，如图 3-1-2 所示。由于映射是一一对应的，故在 C'上，$\mathrm{d}z_1$ 的像 $\mathrm{d}\zeta_1$ 的终点也在前方，而 $\mathrm{d}z_2$ 的像 $\mathrm{d}\zeta_2$ 的终点在 D'内。又由于映射是保角的，$\mathrm{d}\zeta_2$ 相对于 $\mathrm{d}\zeta_1$ 的夹角

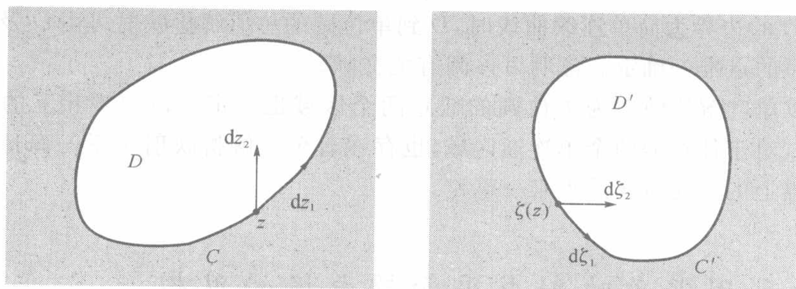


图 3-1-2　微元 $\mathrm{d}z_1$、$\mathrm{d}z_2$ 与它们的像 $\mathrm{d}\zeta_1$、$\mathrm{d}\zeta_2$

应与 $\mathrm{d}z_2$ 相对于 $\mathrm{d}z_1$ 的夹角相同，故可知 C'相对于 D'的绕向与 C 相对于 D 的绕向相同。

以上说明，只需把 D 的边界线 C 映射为 ζ 平面中的C'，再由 C 相对于 D 的绕向即可确定像区域 D'。

3.1.5　保角映射的存在性和唯一性定理

从应用的角度看，保角变换的一个重要问题是：对于任意给定的两个区域而言，是否一定存在一个单叶解析函数，使二者互为保角映射？在什么条件下，映射是唯一的？下面的黎曼定理回答了这个问题。

设 z 平面上单连通区域 D(不含无穷远点)的边界点不止一个，则必存在单叶解析函数 $\zeta=f(z)$，把 D 单叶保角地映射到单位圆内部$|\zeta|<1$。若映射还满足以下条件：

① 对于 D 中的任一定点，有 $f(z_0)=\zeta_0$，这里 ζ_0 为单位圆内的定点；

② $\arg f'(z_0)=\varphi_0$，其中 φ_0 为常数，$0\leqslant\varphi_0<2\pi$，

则映射是唯一的。

证明可参阅《复变函数》(庄圻泰等编，北京大学出版社，1984)，此处从略。

注意，仅满足条件①的映射不是唯一的，这只需举出一个例子即可说明：若 $\zeta=f(z)$满足条件①，取 $\zeta_0=0$，则有 $f(z_0)=0$。但另一个映射 $\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}f(z)$显然也满足 $f(z_0)=0$。而 α 为任意数，故可见 $\zeta=f(z)$不是唯一的映射。只有同时也满足条件② 的映射才是唯一的。

条件②的意义是使过 ζ_0 的线元$\mathrm{d}\zeta|_{\zeta_0}$ 的走向比过 z_0 的线元$\mathrm{d}z|_{z_0}$ 的走向顺时针增加了角度 φ_0，这可由$\mathrm{d}\zeta|_{\zeta_0}=\mathrm{d}z|_{z_0}M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$看出。因此，条件②是规定了过 z_0 的曲线 γ 被映射为单位圆中的曲线 Γ 后所转过的角度，如图 3-1-3 所示。

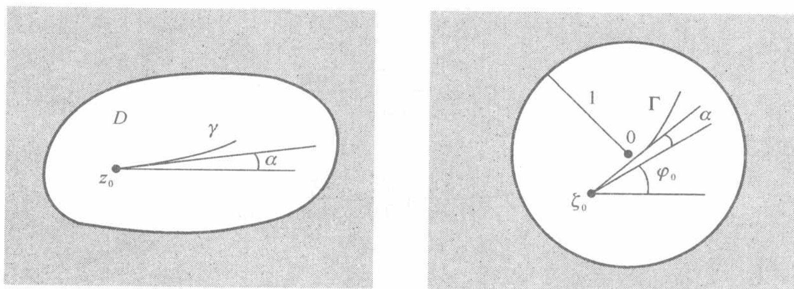


图 3-1-2　φ_0 的意义

当区域 D 的边界为简单连续曲线时，D 到单位圆的单值解析映射可由 D 及单位圆的边界上三对有序的点唯一确定。证明可参阅有关文献。

由于可以单叶解析映射为单位圆的任意两个区域也一定可以实现相互的单叶解析映射，故可推知，对于任意的两个单连通区域，也存在着单叶解析映射关系。而且两者间的保角映射由边界上的三对有序的点唯一确定。

3.2 利用保角映射求平面静电场的思想

前已指出，(x,y)平面中的解析函数 $w(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的物理解释是复势，因为 u、v 皆满足(x,y)平面中的拉普拉斯方程，并且二者的等值线处处正交，正好满足电势和场强的基本性质。现在考察复势 $w(z)$经保角映射 $\zeta(x,y)=\xi(x,y)+\mathrm{i}\eta(x,y)$后，其在 ζ 平面中，是否仍为复势。

首先，由于映射是保角的，故 u、v 在 z 平面中的等值线映射到 ζ 平面后仍相互正交。

其次，考察 u、v 在 z 平面中是否仍满足拉普拉斯方程。

先看 u。因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

对$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$也有类似的关系式，故得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) \tag{3-2-1}$$

因为 $\zeta(z)$解析，由 C-R 条件式(3-1-5)有

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}=0$$

以及

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=0$$

又注意到

$$\zeta'(z)=\frac{\partial \xi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

把 C-R 条件式(3-1-5)代入上式，有

$$\zeta'(z)=\frac{\partial \xi}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

从而有

$$|\zeta'(z)|^2=\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

综合以上各式，则式(3-2-1)化简为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=|\zeta'(z)|^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \tag{3-2-2}$$

因为左边$=0$,而保角映射中 $\zeta'(z)\neq 0$,故知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

同样可知,对于 v 也有同样的关系式。这说明,u、v 在像平面中仍满足拉普拉斯方程。因此,$w(z)$映射到 ζ 平面中后,仍代表静电场的复势。

因此,(x,y)平面中的静电场边值问题经保角映射后,就成为像平面(ξ,η)中的静电场边值问题。因为保角映射是双向单值对应的,故映射具有可逆性。因此,只要求出(ξ,η)平面中的电势,再经逆映射,即可得到(x,y)平面中原边值问题的解。可见,利用保角映射求解二维静电场问题,是有充分根据的。

若场中有连续的电荷分布,则电势满足泊松方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y)$$

利用式(3-2-2),可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)]}{|\zeta'(z)|^2} \tag{3-2-3}$$

由此知电荷密度的保角映射是

$$\rho(x,y)\to\frac{\rho[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)]}{|\zeta'(z)|^2} \tag{3-2-4}$$

因为 $\zeta'(z)\neq 0$,故映射后电荷密度仍是有限的。

但保角映射不改变总电量,即保角映射遵守电荷守恒定律。说明如下。

在 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 区域内的电量为$\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。按变换理论,有 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$。在 3.1 节中已经说明,对保角映射,有 $J=|\zeta'(z)|^2$,故按式(3-2-4)有

$$\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\rho(\xi,\eta)}{|\zeta'(z)|^2}|\zeta'(z)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\rho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{3-2-5}$$

可见原像区域中的电量和像区域中的电量相同。

下面的例子使我们先对用保角映射求静电场有一感性的认识。常用的映射公式将在后面介绍。

【例 3-2-1】 一根单位长度带电量为 Q 的无限长均匀带电直线与地面相距 a,如图3-2-1所示。求空间的电势分布。

解 把(x,y)平面视为复平面,规定地面$(y=0)$电势 $u=0$。

作映射

$$\zeta=\frac{z-\mathrm{i}a}{z+\mathrm{i}a}$$

该映射是保角的,因为 $\zeta'(z)=\dfrac{2\mathrm{i}a}{(z+\mathrm{i}a)^2}\neq 0$。在此映射下,带电线坐标 $z=\mathrm{i}a$ 映射为$\zeta=0$,地面方程 $y=0$ 映射为$\zeta=\dfrac{x-\mathrm{i}a}{x+\mathrm{i}a}$。显然$|\zeta|=1$,故地面映射为单位圆。按边界对应原理,可知地面上方空间映射到了单位圆内,如图 3-2-2

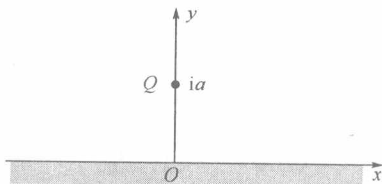


图 3-2-1 无限长均匀带电直线

所示。

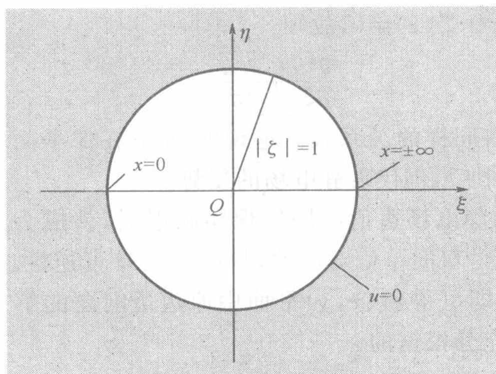


图 3-2-2 上半空间的映射

由普通物理学知识即可写出在单位圆内的电势分布：

$$u(\zeta)=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln|\zeta|$$

对 $u(\zeta)$ 作逆映射，即得 (x,y) 平面内的电势分布：

$$u(x,y)=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{x-\mathrm{i}a}{x+\mathrm{i}a}\right|=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}$$

该结果与用镜像法求得的结果相同。

3.3 基本映射

基本映射是指线性映射、幂映射、根式映射、指数映射和对数映射。本节将讨论这几种映射中，像与原像的关系。

3.3.1 线性映射

映射公式为

$$\zeta=\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z+b=az+b \tag{3-3-1}$$

其中 a、b 为复常数。

该映射包括三种映射：

平移：$\zeta=z+b$；

转动：$\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z$（$\alpha$ 为实数）；

放大：$\zeta=\mu z$（μ 为正实数）。

显然，线性变换中，像与原像为相似形。

3.3.2 幂映射

$$\zeta=z^n \tag{3-3-2}$$

记 $z=\rho e^{i\varphi}$，$\zeta=re^{i\theta}$，则有 $r=\rho^n$，$\theta=n\varphi$（设 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{n}$）。可见此映射使顶点在原点的尖角区域的顶角放大了 n 倍，如图 3-3-1 所示。

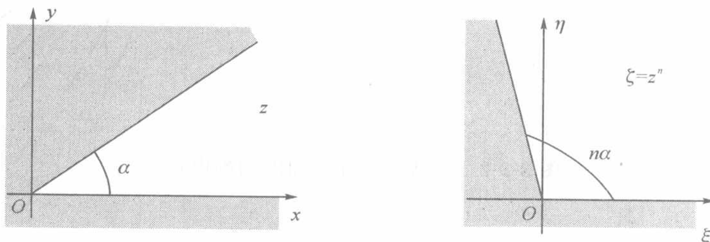


图 3-3-1 幂映射放大了顶角

显然，映射在 $z=0$ 处不保角。

3.3.3 根式映射

映射公式为

$$\zeta=\sqrt[n]{z} \tag{3-3-3}$$

此与幂映射互为逆映射，它使尖角区域的顶角缩小为原来的 $1/n$。

因为 $\zeta'\sim z^{\frac{1}{n}-1}$，故 $\zeta'(0)=0$（当 $n<1$）或不存在（当 $n>1$）。因此该变换与幂映射一样，在 $z=0$ 也是不保角的。这一特点使它们常被用于将原点处有尖角的区域映射为平角。

【例 3-3-1】 求顶角为 $\pi/4$ 的角状带电导体周围的静电场。

解 取坐标系如图 3-3-2(a)所示，则导体的边界方程为 $z_1=\rho e^{i0}$，$z_2=\rho e^{i7\pi/4}$。

作映射 $\zeta=z^{4/7}$，则在 ζ 平面中，边界线方程成为 $\zeta_1=\rho^{4/7}e^{i0}$，$\zeta_2=\rho^{4/7}e^{i\pi}$。于是导体在 ζ 平面中成为整个下半平面，如图 3-3-2(b)所示。

由于 $\eta=0$（导体表面）为一个等势面，故知在 $\zeta=\xi+i\eta$ 中，应以虚部 η 代表电势。于是 (x,y) 平面内的电势为

$$V=\mathrm{Im}\,(z^{4/7})=\mathrm{Im}\,(\rho^{4/7}e^{i4\varphi/7})=\rho^{4/7}\sin\frac{4\varphi}{7}$$

等势面方程为

$$\rho^{4/7}\sin\frac{4\varphi}{7}=\text{const.}$$

图 3-3-2(c)示意地给出了等势面的分布情况。

既然以复势的虚部代表电势，那么实部的等值线就是电力线。也就是说，在上式中以 $\cos\frac{4\varphi}{7}$ 替换 $\sin\frac{4\varphi}{7}$，就得到电力线方程。

由本例可见，保角映射的实质是由某一已知的等势面推知整个场分布（静电场的唯一性定理保证了这里的合理性）。由于导体表面是等势面，故保角映射特别适合于求边界为

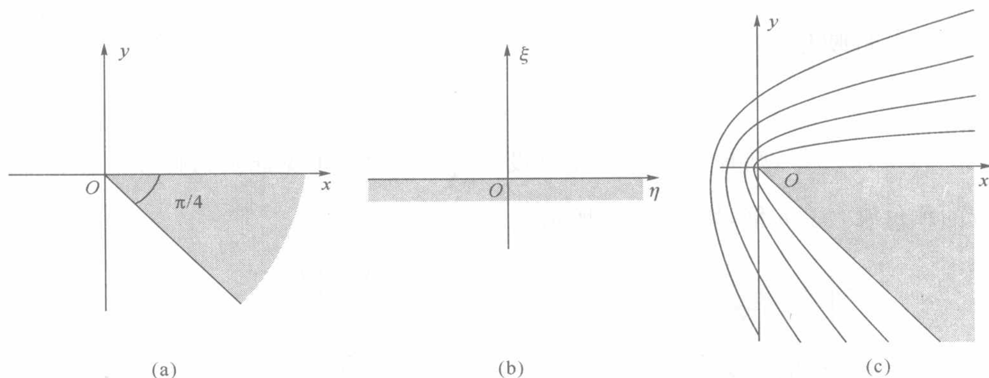


图 3-3-2　角状带电导体周围的静电场

导体面的静电场。

【例 3-3-2】 求带有竖直壁(壁厚不计)的平面带电导体〔如图 3-3-3(a)所示〕周围的电场。

解　分三步把导体映射为整个下半平面：

第一步，令 $z_1=z^2$，得图 3-3-3(b)。

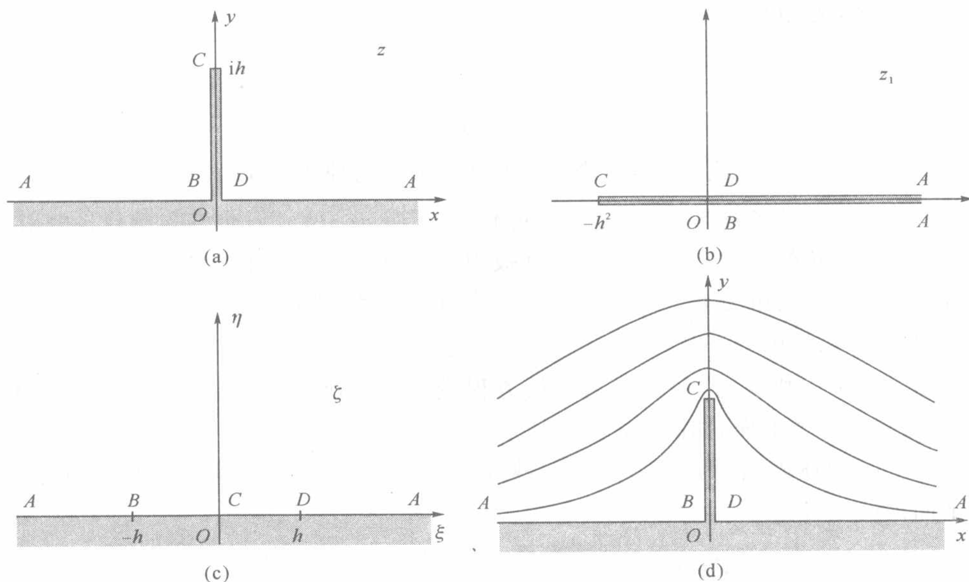


图 3-3-3　例 3-3-2 的系例保角映射

第二步，令 $z_2=z_1+h^2$，平移图形使 C 在原点。

第三步，令 $\zeta=\sqrt{z_2}$，得图 3-3-3 (c)。

此时 ζ 平面中的电场成为无限大平面带电导体外的电场，$\eta=0$ 为等势面，故等势面方程为

$$\operatorname{Im}\zeta=\text{const.}$$

由此作逆映射，即得(x,y)平面内的等势面方程：

$$\operatorname{Im}\sqrt{z^2+h^2}=\text{const.}$$

把 $z=x+\mathrm{i}y$ 代入上式，可将上式写为更为明确的形式：

$$((x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2)^{1/4}\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2+h^2}\right)=\text{const.}$$

等势面示意图如图 3-3-3(d)所示。

3.3.4 指数映射

映射公式为

$$\zeta=\mathrm{e}^z \tag{3-3-4}$$

为看出该映射中像与原像的关系，把映射式(3-3-4)写为 $\zeta=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则有 $r=\mathrm{e}^x,\theta=y$。因为 $0<\theta<2\pi$，故 $0<y<2\pi$，但对 x 无限制。所以该映射是把 z 平面中的无限长条形区域($-\infty<x<\infty,0<y<2\pi$)映射为 ζ 平面中除正实轴以外的整个平面($0<r<\infty,0<\theta<2\pi$)，如图 3-3-4 所示。易于看出，ζ 平面中 $r<1$ 和 $r>1$ 的区域分别对应于 z 平面中 $x<0$ 和 $x>0$ 的条带区域。

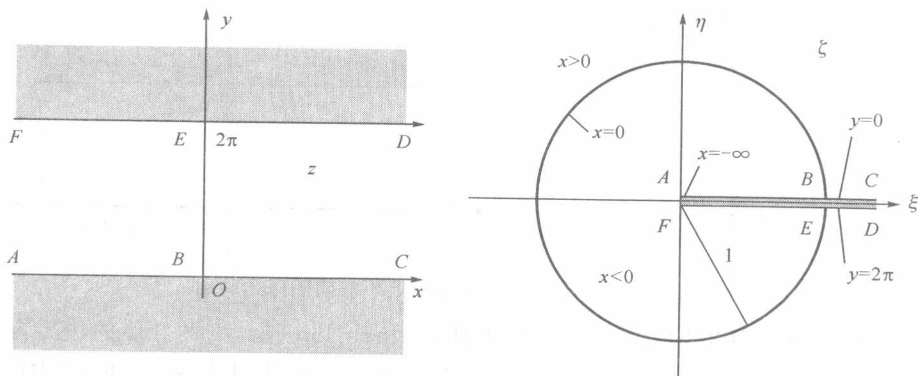


图 3-3-4　指数映射

若取坐标系使条带处于 $-\pi<y<\pi$，则有 $-\pi<\theta<\pi$。此时映射后的区域为除负实轴以外的整个 ζ 平面。x 与 r 的对应关系不变。

3.3.5 对数映射

映射公式为

$$\zeta=\ln z \tag{3-4-5}$$

这是指数映射的逆映射。但需注意，$\ln z$ 为多值函数，故必须取其单值分支。通常取 $0<\arg z<2\pi$。这样，此映射就是把图 3-3-4 中两个平面的图形互换。

【例 3-3-3】 设圆柱电容器的横截面尺寸如图 3-3-5(a)所示。求单位长度的电容。

解 作映射 $\zeta=\ln z$。把 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 代入，得 $\zeta=\ln\rho+\mathrm{i}\theta$。规定 $0\leqslant\theta<2\pi$，则得像区间如图 3-3-5(b)所示。这是平行板电容器的情况，故所求电容为

$$C=2\pi\varepsilon_0/\ln\frac{R_2}{R_1}$$

这正是熟知的结果。

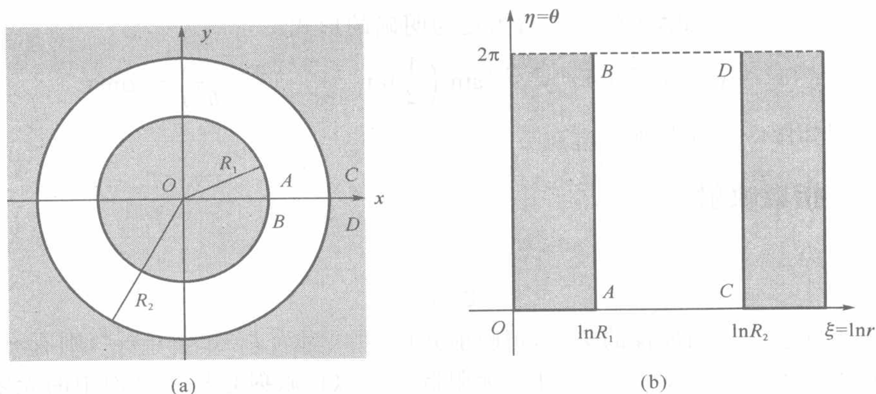


图 3-3-5　圆柱电容器的保角映射

【例 3-3-4】　把两块半无限大导体板连成一块无限大平板，但保持连接处绝缘。设两部分导体的电势分别为 V_1 和 V_2，求板外空间的电势分布。

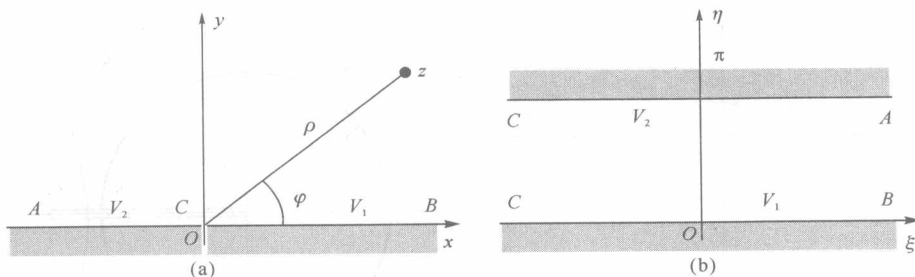


图 3-3-6　两块半无限大导体板上半空间的保角映射

解　取坐标系如图 3-3-6(a)所示。作映射 $\zeta=\ln z=\ln\rho+\mathrm{i}\varphi$，则两导体的边界方程 $z_1=\rho e^{\mathrm{i}0}$ 和 $z_2=\rho e^{\mathrm{i}\pi}$ 映射为 $\zeta_1=\ln\rho$ 和 $\zeta_2=\ln\rho+\mathrm{i}\pi$。故上半 z 平面映射为图 3-3-6(b)中的带形区域，$\eta=0$ 和 $\eta=\pi$ 的电势分别为 V_1 和 V_2。由此可知，ζ 平面中的电势为

$$V(\eta)=V_1+\frac{V_2-V_1}{\pi}\eta\quad(0\leqslant\eta\leqslant\pi)$$

因为 $\eta=\varphi$，故上式即

$$V(\varphi)=V_1+\frac{V_2-V_1}{\pi}\varphi$$

这就是 z 平面中的电势分布。显然，等势面方程即 $\varphi=$ 常数。

由此又知，电力线方程为 $\rho=$ 常数。电场分布如图 3-3-7 所示。

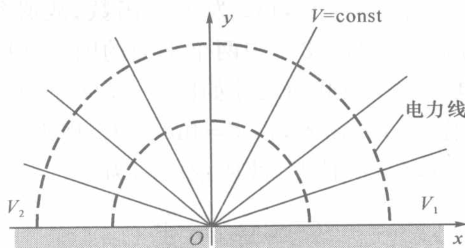


图 3-3-7　板外空间的电场

3.4 反演映射的保圆性和保对称点性

反演映射的公式为

$$\zeta(z)=\frac{1}{z} \tag{3-4-1}$$

该映射很少被单独使用，但它是下一节分式线性映射的基础。该映射具有两个重要的性质——保圆性和保对称点性，下面分别加以介绍。

3.4.1 反演映射的保圆性

在反演映射下，z 平面中的圆在 ζ 平面中的像仍为圆。说明如下。

考虑 z 平面上半径为 R，圆心在 z_0 的圆。对该圆的方程 $|z-z_0|=R$ 两边取平方，得

$$zz^*-z_0z^*-z_0{}^*z+D=0 \tag{3-4-2}$$

其中 $D=|z_0|^2-R^2$。式(3-4-2)也是 z 平面上圆的方程。

在方程(3-4-2)中令 $z=1/\zeta$，然后两边同乘以 $\zeta\zeta^*/D$，即得

$$\zeta\zeta^*-\frac{z_0^*}{D}\zeta^*-\frac{z_0}{D}\zeta+\frac{1}{D}=0 \tag{3-4-3}$$

这是 z 平面上的圆在 ζ 平面中的像的方程。它与式(3-4-2)形式相同，故知圆的像仍为圆。此即保圆性。

应当注意，保圆性并不意味着圆心 z_0 的像 $\zeta_0=1/z_0$ 仍为圆心。比较式(3-4-3)与式(3-4-2)，可知 ζ 平面中的圆心在 z_0^*/D，而不在 ζ_0。

3.4.2 反演映射的保对称点性

① 对称点

设 E 和 F 为由圆心 O 发出的同一射线上的两点，如图 3-4-1 所示。若它们满足

$$\overline{OE}\cdot\overline{OF}=R^2 \tag{3-4-4}$$

R 为圆的半径，则称 E、F 为关于该圆的一对对称点。由此可知，若复平面上的两点 z_1 和 z_2 使以下两式同时得到满足：

$$z_2-z_0=C(z_1-z_0)\quad (C>0\text{ 为实常数}) \tag{3-4-5}$$

$$|z_1-z_0||z_2-z_0|=R^2 \tag{3-4-6}$$

则 z_1 和 z_2 为关于圆 O 的一对对称点。

直线是圆在 $R\to\infty$ 时的特例。关于直线的对称点 E 和 F 是一对位于直线两侧且与直线共面、与直线等距的点，如图 3-4-2 所示。图中 $\overline{PE}=\overline{PF}$。

在图 3-4-1 中，记射线与圆的交点为 P，则式(3-4-4)可写为

$$(R-\overline{PE})(R+\overline{PF})=R^2$$

整理得

$$\overline{PF}=\overline{PE}+\frac{\overline{PE}\cdot\overline{PF}}{R}$$

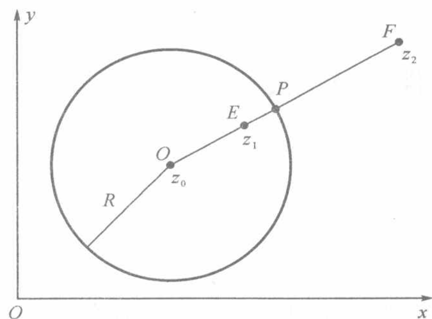


图 3-4-1 关于圆 O 的对称点 z_1 和 z_2

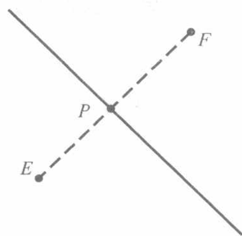


图 3-4-2 关于直线的对称点 E 和 F

当 $R\to\infty$ 时，圆成为直线，而上式成为$\overline{PF}=\overline{PE}$。可见关于直线的对称点是关于圆的对称点的特例。

② 对称点的判定定理

两点 z_1 和 z_2 是关于圆 O 的一对对称点的充分必要条件是

$$z_1^* z_2 - z_0 z_1^* - z_0^* z_2 + D = 0 \tag{3-4-7}$$

证 先证必要性。

若 z_1、z_2 是关于圆(3-4-2)的一对对称点，则方程式(3-4-5)和式(3-4-6)同时成立。把式(3-4-5)代入式(3-4-6)，则有 $C|z_1-z_0|^2=R^2$，即 $C(z_1-z_0)=R^2/(z_1-z_0)^*$。以此代入式(3-4-5)右边，整理即得式(3-4-7)。必要性得证。

再证充分性。

首先，因为

$$(z_1-z_0)^*(z_2-z_0)=z_1^* z_2 - z_0 z_1^* - z_0^* z_2 + |z_0|^2$$

若 z_1、z_2 满足式(3-4-7)，则上式等号右边为 $-D+|z_0|^2=R^2$。于是有

$$(z_1-z_0)^*(z_2-z_0)=R^2$$

两边取模，即得式(3-4-6)。

其次，由上式又可得

$$(z_2-z_0)=\frac{R^2}{|z_1-z_0|^2}(z_1-z_0)$$

右边的分式大于 0，因此该式即式(3-4-5)。充分性得证。

③ 对称点的反演映射

设 z_1、z_2 是一对对称点，则按判定定理，它们满足式(3-4-7)。记 z_1、z_2 的像点分别为 ζ_1、ζ_2，即 $\zeta_1=1/z_1$，$\zeta_2=1/z_2$。代入式(3-4-7)，两边同乘以 $\zeta_1^*\zeta_2/D$，即得

$$\zeta_1^*\zeta_2 - \frac{z_0^*}{D}\zeta_1^* - \frac{z_0}{D}\zeta_2 + \frac{1}{D} = 0 \tag{3-4-8}$$

与式(3-4-7)对照，可知 ζ_1、ζ_2 也满足对称点的判定定理，故它们也是一对对称点。

3.5 分式线性映射

3.5.1 分式线性映射与恒等变换

分式线性映射公式为

$$\zeta=\frac{az+b}{cz+d} \tag{3-5-1}$$

其中 a、b、c、d 皆为复常数，$c\neq 0$。式(3-5-1)可写为

$$\zeta=\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{z+\dfrac{d}{c}}+\frac{a}{c} \tag{3-5-2}$$

（$bc\neq ad$，否则失去分式线性映射的意义）可见其等价于相继作下列四个映射：

$$z_1=z+\frac{d}{c},\quad z_2=\frac{1}{z_1},\quad z_3=\frac{bc-ad}{c^2}z_2,\quad \zeta=z_3+\frac{a}{c}$$

由此知分式线性映射包含了平移、放大和反演。因为平移和放大不改变圆的形状，故该映射也具有保圆性和保对称点性。

对变换式(3-5-1)，若某点 z_0 满足 $\zeta(z_0)=z_0$，则称 z_0 为该映射的不动点。把 z_0 代入式(3-5-1)，则有

$$cz_0^2+(d-a)z_0-b=0$$

可见一个分式线性映射至多有两个不动点。除非 $c=b=0$，$d=a$，此时方程成为恒等式 $0=0$，有无穷多解，但这时映射成为恒等映射：$\zeta(z)=z$。由此可知，有多于两个不动点的分式线性映射必为恒等映射。

3.5.2 分式线性映射的存在和唯一性定理

任给 z 平面上的三个不同点 z_1、z_2、z_3 和 ζ 平面上的三个不同点 ζ_1、ζ_2、ζ_3，存在唯一的分式线性映射，把 z_1、z_2、z_3 依序映射为 ζ_1、ζ_2、ζ_3。

证 先证存在性。考察方程

$$\frac{(\zeta-\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_3)}{(\zeta-\zeta_3)(\zeta_2-\zeta_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \tag{3-5-3}$$

显然该式可写为式(3-5-1)的形式，即，它是一个线性分式映射。不难看出，它把 z_1、z_2、z_3 依序映射为 ζ_1、ζ_2、ζ_3。存在性由此得以证明。

下面证明此映射唯一。

设两个分式线性映射 $\zeta=f(z)$ 和 $\zeta=g(z)$ 都把 z_1、z_2、z_3 依序映射为 ζ_1、ζ_2、ζ_3。现考虑映射 M，它是先作映射 $\zeta=f(z)$，而后作映射 $g^{-1}(\zeta)$，即 $M(z)=g^{-1}[f(z)]$。显然，$M(z)$ 是从 z 平面到 z 平面的映射，即

$$M:\quad z\xrightarrow{f(z)}\zeta\xrightarrow{g^{-1}(\zeta)}z$$

因此可设 $M(z)$ 为把 z_1、z_2、z_3 依序映射为 z'_1、z'_2、z'_3。由前述存在性可知，将 z_1、z_2、z_3 依序映射为 z'_1、z'_2、z'_3 的分式线性映射存在，故可设 $M(z)$ 为该分式线性映射。

但另一方面，$M(z)$ 事实上是把 z_1，z_2，z_3 依序映射为 z_1，z_2，z_3：

$$(z_1,z_2,z_3)\xrightarrow{f(z)}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\xrightarrow{g^{-1}(\zeta)}(z_1,z_2,z_3)$$

可见映射 $M(z)$ 有三个不动点，因此 $M(z)$ 为恒等变换：

$$M(z)=g^{-1}[f(z)]=z$$

故有 $f(z)=g(z)$。唯一性得证。

方程(3-5-3)实际上就是分式线性映射的公式，通常简写为

$$(\zeta,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=(z,z_1,z_2,z_3) \tag{3-5-4}$$

两边分别代表式(3-5-3)的两边，例如

$$(z,z_1,z_2,z_3)\equiv\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \tag{3-5-5}$$

(z,z_1,z_2,z_3)称为 z、z_1、z_2、z_3 这四点的交比。式(3-5-4)或式(3-5-3)表明，交比在分式线性映射下是不变的。

作分式线性映射时，只要把选定的 z_1、z_2、z_3 和 ζ_1、ζ_2、ζ_3 代入式(3-5-4)或式(3-5-3)，就得到了映射式。若 z_i 或 $\zeta_i(i=1,2,3)$ 中有一点为∞，则交比中含∞点的两个差式相互约掉，即这两个差式自动成为 1。

【例 3-5-1】 求把 $z=\infty,1,0$ 映射为 $\zeta=2,0,\infty$的分式线性映射。

解 所求映射为$(\zeta,2,0,\infty)=(z,\infty,1,0)$。按式(3-5-3)，此即

$$\frac{\zeta-2}{-2}=\frac{1}{z}$$

故所求映射为

$$\zeta=2\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

至于映射双方区域间的对应关系，可以用以下方法简单地判定：取 $z=\pm\mathrm{i}$，则由映射关系式，有 $\zeta=2(1\pm\mathrm{i})$。由此即可知道，z 的上(下)半平面对应于 ζ 的上(下)半平面。

【例 3-5-2】 导出例题 3-2-1 中的映射式 $\zeta=\dfrac{z-\mathrm{i}a}{z+\mathrm{i}a}$。

解 该映射是把线电荷映射为圆心，把地面映射为单位圆，如图 3-5-1 所示。

首先取定三对对应点：

$$A：z_1=\mathrm{i}a,\quad \zeta_1=0$$
$$B：z_2=0,\quad \zeta_2=-1$$
$$C：z_3=-\mathrm{i}a,\quad \zeta_3=\infty$$

这里已经注意到 z_3 是 z_1 的对称点，而圆心的对称点在∞。

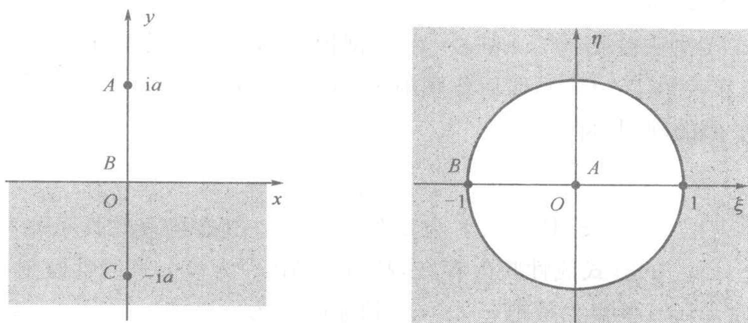


图 3-5-1 地面映射为单位圆

把以上点对代入映射式$(\zeta,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=(z,z_1,z_2,z_3)$，得

$$(\zeta,0,-1,\infty)=(z,\mathrm{i}a,0,-\mathrm{i}a)$$

整理即得

$$\zeta=\frac{z-\mathrm{i}a}{z+\mathrm{i}a}$$

3.5.3 传输线理论中的史密斯阻抗圆图

史密斯(Smith)阻抗圆图在电磁波传输线理论中有重要的应用。下面从线性分式映射的角度对其加以说明。

传输线上任一点的复阻抗为 $z=r+\mathrm{i}x$，其中 r 为电阻，$0\leqslant r<\infty$；x 为电抗，$-\infty<x<\infty$。因此，z 的定义域为 $r\geqslant 0$ 的半无限大平面。

另一方面，传输线上任一点的复反射系数 Γ 与该点的复阻抗有如下关系：

$$\Gamma=\frac{z-z_0}{z+z_0} \tag{3-5-6}$$

这里 z_0 为传输线的特性阻抗，是实常数。从映射的角度看，该式是从复阻抗 z 平面向复反射系数 Γ 平面的线性分式映射，由例 3-5-2 可知它将 z 平面的右半无限区间映射为 Γ 平面上的单位圆内部。点的对应关系是：

$$(z=0,z_0,\infty)\rightarrow(\Gamma=-1,0,1)$$

如图 3-5-2 所示。这样，用 Γ 平面上的单位圆就可以包括复阻抗的全体值，这比用半无限大的 z 平面显然方便得多。

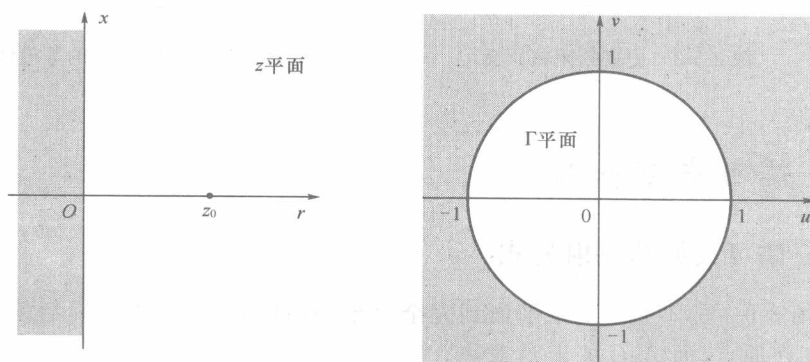


图 3-5-2 半无限大区间映射为单位圆内部

等电阻线($r=$const.)和等电抗线($x=$const.)在 z 平面中分别是平行于虚轴和实轴的无限长和半无限长直线。下面考察这两种等值线的映像。

首先将式(3-5-6)改写为

$$\frac{z}{z_0}=\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{3-5-7}$$

记 $\Gamma=u+\mathrm{i}v$，与 $z=r+\mathrm{i}x$ 一起代入上式，分开实部和虚部，可得两个方程，它们分别为只与 r 和 x 有关的圆：

$$\left(u-\frac{r}{r+z_0}\right)^2+v^2=\left(\frac{z_0}{r+z_0}\right)^2 \tag{3-5-8}$$

$$(u-1)^2+\left(v-\frac{z_0}{x}\right)^2=\left(\frac{z_0}{x}\right)^2 \tag{3-5-9}$$

由以上两式可以看出，在 Γ 平面中，等 r 线和等 x 线都是圆。等 r 线的圆心在实轴上 $u=r/(r+z_0)$ 处，半径为 $z_0/(r+z_0)$。因此 $r=0$ 的等值线就是单位圆 $|\Gamma|=1$，其圆心在原

点；而 $r=\infty$ 的等值圆半径为 0，圆心在 $u=1$。其余的 r 等值圆半径介于 0 和 1 之间，圆心在实轴上 $u=0$ 和 $u=1$ 之间。等 x 线的圆心在 $u=1, v=z_0/x$ 处，半径为 $\frac{z_0}{|x|}$。等 r 线和等 x 线相互正交，如图 3-5-3 所示。这就是史密斯阻抗圆图，它给出了传输线的全部复阻抗。

顺便指出，因为 Γ 又可写为 $\Gamma=|\Gamma|e^{i\varphi}$，故在 Γ 平面中，$|\Gamma|$ 的等值线为以原点为心的同心圆，其中最大半径为 1（$|\Gamma|$ 的最大值为 1）；而 φ 的等值线则为由原点发出的射线，如图 3-5-4所示。该图与阻抗圆图都叫做史密斯圆图。

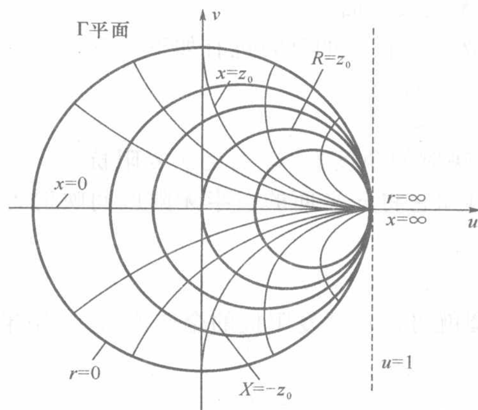


图 3-5-3　史密斯阻抗圆图

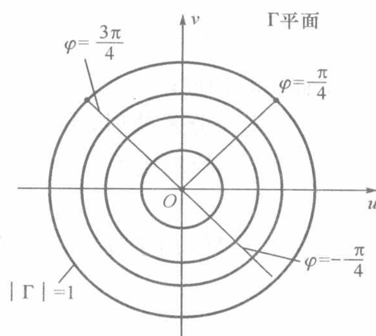


图 3-5-4　$|\Gamma|$ 与 φ 的等值线

3.6　儒可夫斯基映射

3.6.1　儒可夫斯基映射公式

考虑由图 3-6-1 的不完全上半平面到完全上半平面的映射，要求映射后仍保持原来的对称性，即 B 在原点，而 A、C 关于 B 对称。

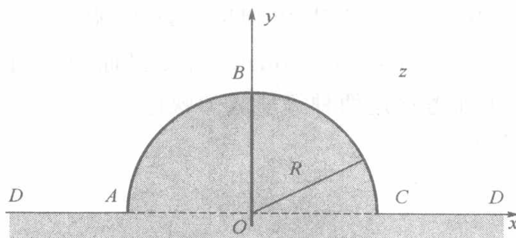


图 3-6-1　不完全上半平面

首先设法将圆弧映射为直线。这可由以下步骤实现。

第一步，用分式线性映射将弧 ABC 映射为虚轴：

$$A:(z_1=-R, \zeta_1=\infty)$$

$$B:(z_2=iR, \zeta_2=i)$$

$$C:(z_3=R, \zeta_3=0)$$

代入式(3-5-5)，得 $\zeta=\dfrac{z-R}{z+R}$。映射后的图形如图 3-6-2(a)所示。

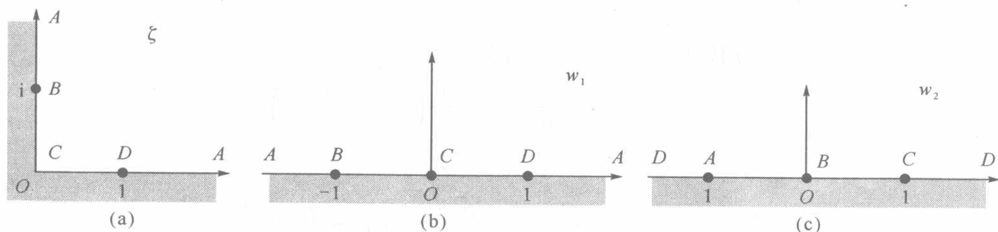


图 3-6-2　圆弧映射为直线

第二步，令 $w_1=\zeta^2$，将图 3-6-2(a)中的折线映射为沿实轴的直线，如图 3-6-2(b)所示。显然，该图尚未满足对称性要求。

第三步，使图 3-6-2(b)中直线上各点恢复原来的对称性，如图 3-6-2(c)所示。但这一目标不能经平移实现，因为无穷远点不能经有限平移到达有限远点。

分式线性映射可实现此目标，因为它能将圆仍映射为圆，而直线是圆的特例。因此，取映射式$(w_1,\infty,-1,0)=(w_2,-1,0,1)$，整理即得

$$w_2=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{R}+\frac{R}{z}\right)\tag{3-6-1}$$

此即儒可夫斯基(Жуковский)映射。在此映射中，原图形的对称性保持不变，故原图中虚轴上的点仍映射在虚轴上。

【例 3-6-1】　地面上有一无限长半圆柱形突起，圆柱半径为 1。在半圆柱的上方与圆柱轴线距离 a 处，有一平行于圆柱轴线的无限长带电直线，线电荷密度为 Q，如图 3-6-3(a)所示。求空间各点的电势。

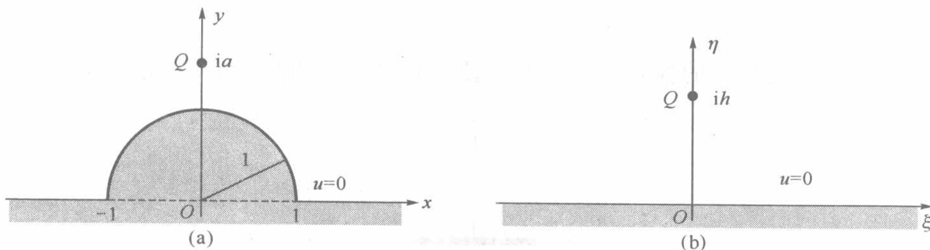


图 3-6-3　无限长半圆柱形突起映射为平面

解　利用式(3-6-1)将图形 3-6-3(a)映射为图 3-6-3(b)：

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\tag{3-6-2}$$

图 3-6-3(b)中

$$h=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\tag{3-6-3}$$

图 3-6-3(b)中的电势分布已在例题 3-2-1 中求得，为

$$u(\xi,\eta)=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{\xi^2+(\eta-h)^2}}{\sqrt{\xi^2+(\eta+h)^2}} \tag{3-6-4}$$

为得到原图形的电势分布，还需作逆映射。

把 $z=x+\mathrm{i}y,\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$ 代入式(3-6-2)，可得

$$\xi=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right),\eta=\frac{1}{2}\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

利用式(3-6-3)，有

$$\frac{\xi^2+(\eta-h)^2}{\xi^2+(\eta+h)^2}=\frac{[x^2+(y-a)^2]\left[x^2+(x^2+\left(y+\frac{1}{a}\right)^2\right]}{[x^2+(y+a)^2]\left[x^2+\left(y-\frac{1}{a}\right)^2\right]}$$

代入式(3-6-4)，即得图 3-6-3(a)的电势分布：

$$u(x,y)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}+\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{a}\right)^2}}+$$
$$\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(y+\frac{1}{a}\right)^2}}+\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}$$

这与用镜像法得到的结果完全相同。

3.6.2 单位圆内部区域在儒可夫斯基映射下的像

前面已见，儒氏映射把除半个单位圆以外的上半平面映射为整个上半平面。而且不难看出，该映射也把除半个单位圆以外的下半平面映射为整个下半平面。

另外，把单位圆方程 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 代入映射式(3-6-1)，有

$$\zeta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})=\cos\varphi$$

可见单位圆在儒氏映射下的像是沿实轴的一段 $-1\leqslant\xi\leqslant1$，如图 3-6-4 所示。

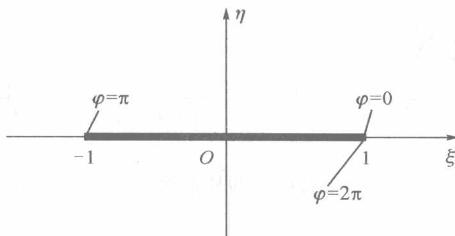


图 3-6-4 单位圆在儒氏映射下的像

综上可知，儒氏映射把单位圆以外($|z|>1$)的平面映射为除 ξ 轴上[-1,1]一段以外的整个平面。

现在考察单位圆内部($|z|<1$)区间在儒氏映射下的像。

把 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(\rho<1)$ 和 $\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$ 代入映射式(3-6-1)，分开实部和虚部，得

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\quad \eta=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \tag{3-6-5}$$

现考虑单位圆内部的任意一个同心圆：$|z|=\rho_0<1$ 为常数。对此，式(3-6-5)给出

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1 \tag{3-6-6}$$

其中

$$a=\frac{1}{2}\left(\rho_0+\frac{1}{\rho_0}\right),\quad b=\frac{1}{2}\left|\rho_0-\frac{1}{\rho_0}\right|$$

方程(3-6-6)为椭圆方程，其两个半轴分别为 a 和 b，而焦点在实轴上的 $\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm1$ 处。可见，单位圆内部的同心圆族被映射为焦点在 $\zeta=\pm1$ 的共焦椭圆族，其中，$\rho_0\to1^-$ 的圆（对应于 $a=1,b=0$）映射为紧靠实轴$(-1,1)$的围线，而 $\rho_0\to0^+$ 的圆（对应于 $a\to\infty,b\to\infty$）映射为半径无限大的圆。由此可见，单位圆内部区域被映射为除$(-1,1)$一段实轴以外的整个平面，该平面与单位圆外的像平面在实轴$(-1,1)$上相连接。

再考虑单位圆内部的射线。射线方程为 $\varphi=\text{const.}$，代入式(3-6-5)，得

$$\frac{\xi}{\cos\varphi_0}=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right),\quad \frac{\eta}{\sin\varphi_0}=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)$$

消去 ρ，得

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1 \tag{3-6-7}$$

其中 $a=|\cos\varphi_0|$，$b=|\sin\varphi_0|$。式(3-6-7)为焦点在 $\zeta=\pm1$ 的双曲线方程，故知单位圆内部的射线族被映射为共焦双曲线族。

以上情况如图 3-6-5 所示。

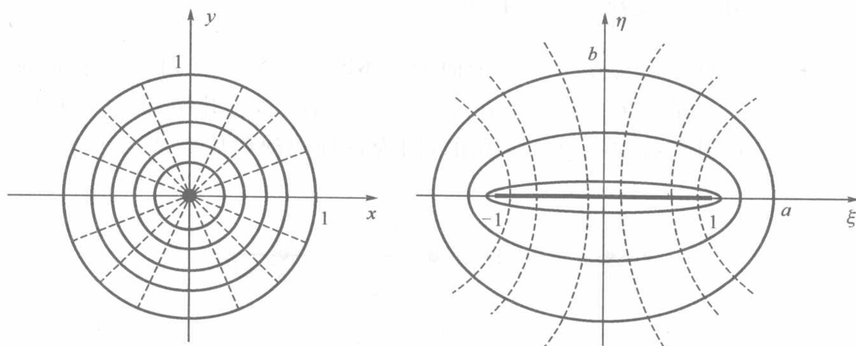


图 3-6-5　单位圆内部区域的映射

由于儒氏映射的这些特点，使得该映射在椭圆边界和双曲线边界的定解问题中有重要的应用。此外，儒氏映射还被用于计算飞机机翼的剖面形状。

3.7　多角形区域的映射

本节介绍将一个多角形区域变换为整个上半平面的映射。该映射又称为施瓦兹-克利斯托夫(Shwarz-Christoffel)映射，简称 S-C 映射。

3.7.1 多角形顶点的外角

以 $z_i(i=1,2,\cdots,n)$表示 z 平面中的 n 角形区域 D 的各个顶角的坐标，以 θ_i 表示顶角 z_i 的外角，如图 3-7-1 所示。这里外角的定义如下：某一顶点的外角，是起点在该顶点的矢量由进入顶点的方向转到离开顶点的方向所转过的角度，且以逆时针转动为正。例如在图 3-7-1 中，θ_1、θ_2、θ_3 皆>0，而 $\theta_4<0$。显然，绕多边形一周，总共转过的角度为 2π，故有

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi \tag{3-7-1}$$

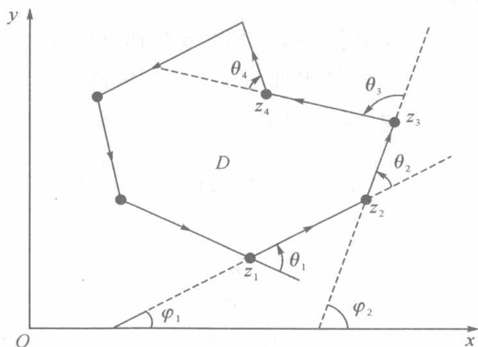


图 3-7-1　多角形区域及其外角

3.7.2 把多角形区域映射为上半平面

现在考虑将区域 D 映射为整个上半平面 D'，亦即把边界线映射为 ζ 平面的整个实轴。记 $b_i(i=1,2,\cdots n)$为 z_i 的像点，它们都在 ζ 平面的实轴上，且排列顺序与原像一致，如图 3-7-2所示。显然该映射在各顶点是不保角的，因为各顶角映射后皆成为平角 π。

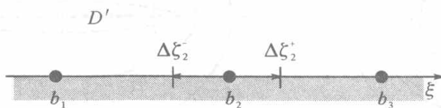


图 3-7-2　各像点的位置

为得到映射公式，现在来考察区域 D 各边的辐角在映射中的变化情况。

以顶点 z_2 为例。与之相连的两个线元$\Delta z|_{z=z_2^-}$和$\Delta z|_{z=z_2^+}$（$\Delta z\equiv z-z_2$）的辐角分别为

$$\arg\Delta z|_{z=z_2^-}=\pi+\varphi_1,\quad \arg\Delta z|_{z=z_2^+}=\varphi_2 \tag{3-7-2}$$

考虑 b_2 附近。记 $\Delta\zeta\equiv\zeta-b_2$，则有

$$\arg\Delta\zeta|_{\zeta=b_2^-}=\pi,\quad \arg\Delta\zeta|_{\zeta=b_2^+}=0 \tag{3-7-3}$$

由式(3-7-2)和式(3-7-3)可得

$$\arg\frac{\Delta z}{\Delta\zeta}\bigg|_{b_2^-}=\varphi_1,\quad \arg\frac{\Delta z}{\Delta\zeta}\bigg|_{b_2^+}=\varphi_2 \tag{3-7-4}$$

在两式中取 $\Delta\zeta\to0$ 的极限并相减，得

$$\arg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\bigg|_{b_2^+}-\arg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\bigg|_{b_2^-}=\varphi_2-\varphi_1=\theta_2 \tag{3-7-5}$$

另一方面，式(3-7-3)中两式相减，有

$$\arg(\zeta-b_2)\big|_{b_2^+}-\arg(\zeta-b_2)\big|_{b_2^-}=-\pi \tag{3-7-6}$$

两边同乘以 $-\frac{\theta_2}{\pi}$，得

$$\arg(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}}\bigg|_{b_2^+}-\arg(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}}\bigg|_{b_2^-}=\theta_2 \tag{3-7-7}$$

比较式(3-7-5)和式(3-7-7)，可见在经过 b_2 点时，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}$与$(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}}$的辐角有相同的跃变。因此，在 b_2 的邻域内有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=A_2(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}} \tag{3-7-8}$$

其中 A_2 与 θ_2 无关。该式保证了当 z 沿 D 的边界线越过顶点 z_2 时，ζ 也沿实轴越过b_2 点。

同理可知，在 b_1 的邻域内应有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=A_1(\zeta-b_1)^{-\frac{\theta_1}{\pi}} \tag{3-7-9}$$

由此可推知，n 角形的映射式应为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=M(\zeta-b_1)^{-\frac{\theta_1}{\pi}}(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}}\cdots(\zeta-b_n)^{-\frac{\theta_n}{\pi}} \tag{3-7-10}$$

其中 M 为复常数。该式与式(3-7-8)不矛盾，因为在 $\zeta=b_2$ 的邻域内，除 $\zeta-b_2$ 项外，其他括号都与 θ_2 无关，故皆可归入 A_2 中，于是式(3-7-10)成为式(3-7-8)。

由式(3-7-10)可写出

$$z=z_0+M\int(\zeta-b_1)^{-\frac{\theta_1}{\pi}}(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}}\cdots(\zeta-b_n)^{-\frac{\theta_n}{\pi}}\mathrm{d}\zeta \tag{3-7-11}$$

其中 z_0 为复常数。此式即 S-C 映射。由此求出反函数 $\zeta(z)$，即得到由 z 平面到 ζ 平面的映射。

根据保角映射的存在和唯一性定理，指定三对点$(z_i,b_i)(i=1,2,3)$即确定了一个映射，故式(3-7-11)中只有三个 b_i 可以预先指定，其余各 b_i 以及 z_0 和 A 共 $n-1$ 个常数皆须经映射式(3-7-11)由原图形确定。但有时也可根据对称性，事先确定某些 b_i 的值。

3.7.3 无穷远顶点的外角

假定 z_2 在无穷远，如图 3-7-3 所示，那么 θ_2 应如何确定？

作一条辅助线(即图 3-7-3 中的虚线)，使之与连接 z_2 的两条线相交于z'_2和z''_2，这样就得到一个由顶点 z_1、z'_2、z''_2、z_3、…、z_n 构成的 $n+1$ 边形。记z'_2和z''_2的外角分别为θ'_2和θ''_2，则显然

$$\theta'_2+\theta''_2+\sum_{i\neq 2}^{n}\theta_i=2\pi \tag{3-7-12}$$

记z'_2和z''_2的像点分别为b'_2和b''_2，则对于该 $n+1$ 边形，式(3-7-11)中的$(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}}$项应改为$(\zeta-b'_2)^{-\frac{\theta'_2}{\pi}}(\zeta-b''_2)^{-\frac{\theta''_2}{\pi}}$。再令辅助线推向无穷远，则 $n+1$ 边形就应等同于顶点 z_2 在无穷远的 n 边形。但此时b'_2和b''_2皆趋于 b_2，故

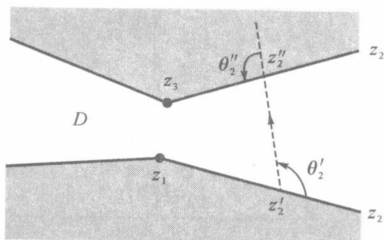


图 3-7-3 无穷远点的映射

$$(\zeta-b'_2)^{-\frac{\theta'_2}{\pi}}(\zeta-b''_2)^{-\frac{\theta''_2}{\pi}}\to(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta'_2+\theta''_2}{\pi}} \tag{3-7-13}$$

与$(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}}$相比，可知应有

$$\theta_2=\theta'_2+\theta''_2 \tag{3-7-14}$$

由此可知，前面对外角的定义，对无穷远顶点同样成立。图 3-7-4 示出了几种情况。

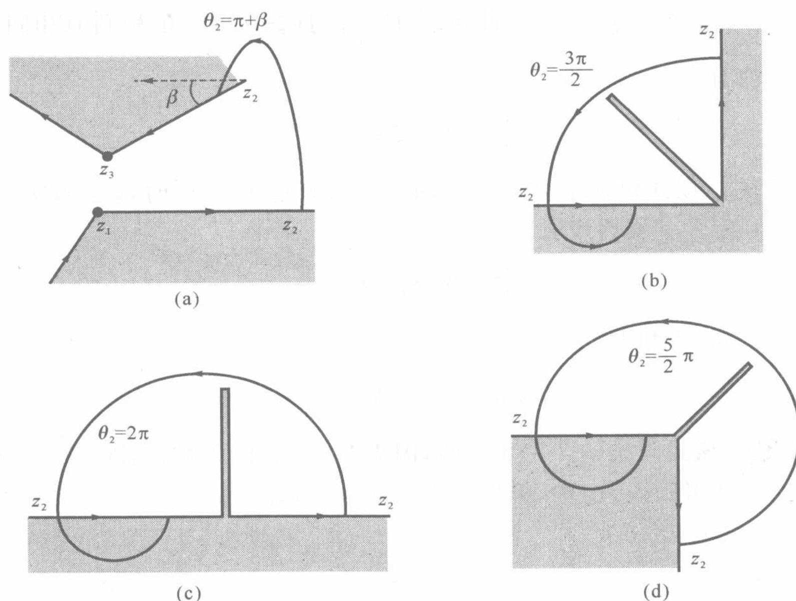


图 3-7-4　几种无穷远顶点的外角

3.7.4　有无穷远像点的情况

不妨设$|b_1|\to\infty$。此时$(\zeta-b_1)^{-\frac{\theta_1}{\pi}}$中的$\zeta$可以忽略，成为常数$(-b_1)^{-\frac{\theta_1}{\pi}}$。将它合并到$M$中，则式(3-7-11)成为

$$z=z_0+M\int(\zeta-b_2)^{-\frac{\theta_2}{\pi}}\cdots(\zeta-b_n)^{-\frac{\theta_n}{\pi}}\mathrm{d}\zeta \tag{3-7-15}$$

此即$|b_1|\to\infty$时的 S-C 公式。这就是说，若某b_i(只能有一个)在无穷远，则 S-C 公式中与之相关的项可直接改为 1。

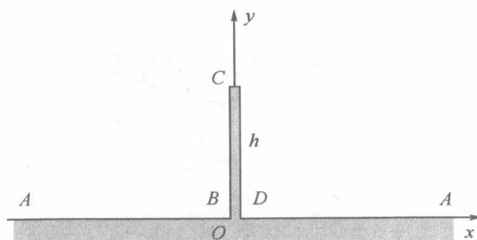


图 3-7-5　带有无限长竖直壁的导体平面

【例 3-7-1】　将带有高h的无限长竖直壁的导体平面的上方区域(如图 3-7-5 所示)映射为整个上半平面。

解　这是一个四边形区域，顶点A在无穷远。各点的外角以及像点列于表 3-7-1 中，其中A、B、C三点的像点是指定的，而D点的像点则是根据其与B点的对称性而确定的，这样，本来需要确定三个常数$(n-1=3)$，现在只需确定两个了。

表 3-7-1　图 3-7-5 中各顶点的外角和像点

	A	B	C	D
z_i	∞	0	$\mathrm{i}h$	0
θ_i	2π	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$
b_i	∞	$-h$	0	h

根据公式(3-7-15)，有

$$z = z_0 + M\int(\zeta+h)^{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}}\zeta^{\frac{-\pi}{\pi}}(\zeta-h)^{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}}\mathrm{d}\zeta$$

$$= z_0 + M\int\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-h^2}}\mathrm{d}\zeta$$

$$= z_0 + M\sqrt{\zeta^2-h^2} \tag{3-7-16}$$

现确定 z_0 和 M。根据 B，令 $z=0,\zeta=-h$，有 $0=z_0$。再根据 C，令 $z=\mathrm{i}h,\zeta=0$，又有 $\mathrm{i}h=M\sqrt{-h^2}=\mathrm{i}hM$，故 $M=1$。于是式(3-7-16)成为

$$z=\sqrt{\zeta^2-h^2} \tag{3-7-17}$$

于是，由 z 平面到 ζ 平面的映射式为

$$\zeta=\sqrt{z^2-h^2} \tag{3-7-18}$$

这里根号前取正号，是为了保证像区域为上半平面。

【例 3-7-2】　将图 3-7-6 所示的分支波导内部区域映射为 ζ 的上半平面，使满足以下对应关系：

$$z_1=\infty\to b_1=\infty,\quad z_3=0\to b_3=0,\quad z_4=\infty\to b_4=1$$

内部导体板的厚度不计。

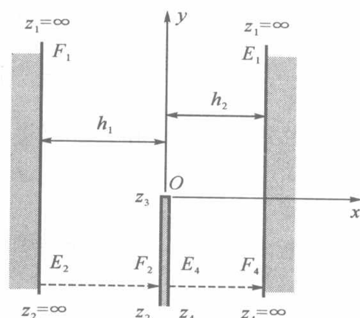


图 3-7-6　分支波导的内部区域

解　所论区域为四边形。首先列出表 3-7-2 如下，其中 b_2 待定。因为像区域在 ζ 的上半平面，故由边界对应定理可知 $b_2<0$。

表 3-7-2　图 3-7-6 中各顶点的外角和像点

i	1	2	3	4
z_i	∞	∞	0	∞
θ_i	π	π	$-\pi$	π
b_i	∞	b_2	0	1

应用 S-C 公式，有

$$z = z_0 + M\int(\zeta-b_2)^{-\frac{\pi}{\pi}}\zeta^{\frac{-\pi}{\pi}}(\zeta-1)^{-\frac{\pi}{\pi}}\mathrm{d}\zeta$$

$$= z_0 + M\int\frac{\zeta}{(\zeta-b_2)(\zeta-1)}\mathrm{d}\zeta$$

$$= z_0 + M[-b_2\ln(\zeta-b_2)+\ln(1-\zeta)] \tag{3-7-19}$$

式中共有三个待定常数：z_0、M、b_2，它们可由 $z_1\sim z_4$ 中的任意三个确定下来。

由图 3-7-6 可知

$$h_1=\int_{E_2}^{F_2}\mathrm{d}z=\int_{b_2-\varepsilon}^{b_2+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta \tag{3-7-20}$$

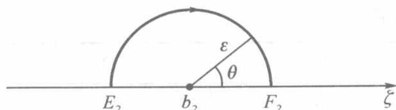


图 3-7-7　绕过极点的小半圆周

其中 $\varepsilon\to 0$。显然 $\zeta=b_2$ 是单极点（这是因为 z_2 是顶点，在此处映射不保角，故 $\frac{d\zeta}{dz}=0$），因此积分只能取主值，即先取积分路径为绕过极点的小半圆周，如图 3-7-7 所示，然后在积分结果中令 $\varepsilon\to 0$。

在图 3-7-7 的半圆周上

$$\zeta=b_2+\varepsilon e^{i\theta},\quad d\zeta=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$

由式(3-7-19)求得 $\frac{dz}{d\zeta}$，代入式(3-7-20)，则有

$$\begin{aligned}h_1 &= \frac{M}{1-b_2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\left(\frac{-b_2}{\varepsilon e^{i\theta}}-\frac{1}{1-b_2-\varepsilon e^{i\theta}}\right)i\varepsilon e^{i\theta}d\theta \\ &= i\,\frac{b_2\pi}{1-b_2}M \end{aligned}\tag{3-7-21}$$

对于 $z_4\to b_4=1$，类似地有

$$h_2=\int_{E_4}^{F_4}dz=\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{dz}{d\zeta}d\zeta\tag{3-7-22}$$

在 $\zeta=1$ 的邻域内，$\zeta=1+\varepsilon e^{i\theta}$，故有

$$\begin{aligned}h_2 &= \frac{M}{1-b_2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\left(\frac{-b_2}{1-b_2+\varepsilon e^{i\theta}}+\frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}\right)i\varepsilon e^{i\theta}d\theta \\ &= -i\,\frac{\pi}{1-b_2}M \end{aligned}\tag{3-7-23}$$

由式(3-7-21)和式(3-7-23)可以求得

$$b_2=-\frac{h_1}{h_2},\quad M=\frac{i}{\pi}(h_1+h_2)\tag{3-7-24}$$

把 $z=z_3=0$ 和 $\zeta=b_3=0$ 代入式(3-7-19)，可得

$$z_0=\frac{b_2M}{1-b_2}\ln(-b_2)\tag{3-7-25}$$

综合式(3-7-24)和式(3-7-25)，代入式(3-7-19)，最后得到

$$z=i\,\frac{h_2}{\pi}\ln\left[\left(1+\frac{h_2}{h_1}\zeta\right)^{\frac{h_1}{h_2}}(1-\zeta)\right]\tag{3-7-26}$$

3.8　平行板电容器边缘附近的电场分布

作为保角映射的应用实例，本节讨论平行板电容器边缘附近的电场分布。

3.8.1　场区的保角映射

平行板电容器极板附近的图形及所取坐标系如图 3-8-1 所示，未画出的部分可视为延伸至无穷远，设上下极板电位分别为 $\pm V_0$。

首先用 S-C 映射把电容器内外的电场映射为 ζ_1 的上半平面。指定 A、B、C、D 各点的像位置如图 3-8-2 所示，其中 $b_4=1$ 是根据 D 与 B 的对称性而判定的。注意到原图中两个

C 点并不等电位，故图 3-8-2 中原点处留有一缝隙，以表示两边绝缘。

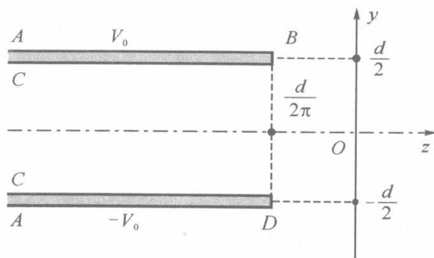


图 3-8-1 电容器极板的附近区域

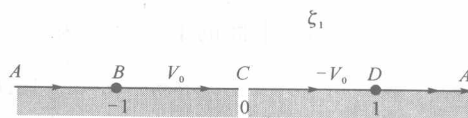


图 3-8-2 A、B、C、D 各点的像位置

表 3-8-1 图 3-8-1 中各顶点的外角和像点

	z	θ	b
A	∞	3π	∞
B	$-\frac{d}{2\pi}+\mathrm{i}\,\frac{d}{2}$	$-\pi$	-1
C	0	π	0
D	$-\frac{d}{2\pi}-\mathrm{i}\,\frac{d}{2}$	$-\pi$	1

根据图 3-8-1 和图 3-8-2 列出表 3-8-1。将表中各值代入 S-C 映射公式(3-7-11)，有

$$z = z_0 + M\int(\zeta_1 + 1)\zeta_1^{-1}(\zeta_1 - 1)\mathrm{d}\zeta = z_0 + M\left(\frac{\zeta_1^2}{2} - \ln\zeta_1\right) \tag{3-8-1}$$

对于 B 点，式(3-8-1)给出

$$-\frac{d}{2\pi}+\mathrm{i}\,\frac{d}{2}=z_0+M\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\pi\right) \tag{3-8-2}$$

对于 D 点，式(3-8-1)给出

$$-\frac{d}{2\pi}-\mathrm{i}\,\frac{d}{2}=z_0+\frac{M}{2} \tag{3-8-3}$$

由式(3-8-2)和式(3-8-3)可得

$$M=-\frac{d}{\pi},\quad z_0=-\mathrm{i}\,\frac{d}{2} \tag{3-8-4}$$

于是

$$z=-\mathrm{i}\,\frac{d}{2}-\frac{d}{\pi}\left(\frac{\zeta_1^2}{2}-\ln\zeta_1\right) \tag{3-8-5}$$

现在再经如下步骤即可把 ζ_1 的上半平面映射为无限大平行板电容器内部：

$$\begin{cases}\zeta_2=\zeta_1^2\\ \zeta_3=\ln\zeta_2\\ \zeta=\zeta_3-\mathrm{i}\pi\end{cases} \tag{3-8-6}$$

如图 3-8-3 所示。

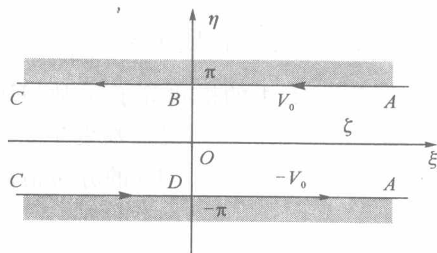


图 3-8-3 ζ_1 上半平面的映射

综合以上各映射，可得

$$z+\mathrm{i}\,\frac{d}{2}=\frac{d}{2\pi}(\mathrm{e}^{\zeta}+\zeta) \tag{3-8-7}$$

此即由图 3-8-1 到图 3-8-3 的映射公式。

3.8.2 利用复势分析电场

由图 3-8-3 可知 ζ 平面的电位分布为

$$u=\frac{V_0}{\pi}\eta=\frac{V_0}{\pi}\mathrm{Im}\,\zeta=\mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\,\frac{V_0}{\pi}\zeta\right) \tag{3-8-8}$$

故复势 $w=u+\mathrm{i}v$ 可写为

$$w=-\mathrm{i}\,\frac{V_0}{\pi}\zeta \tag{3-8-9}$$

由此,式(3-8-7)可写为

$$z=\frac{d}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{V_0}w}+\mathrm{i}\,\frac{\pi}{V_0}w\right) \tag{3-8-10}$$

此式实际上给出了复势的空间分布。由此可进而求出场强的分布。

根据复场强与复势的关系 $E=-\frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}z}$〔见式(2-1-8)〕,有

$$|E|=\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|=\frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right|}=\frac{2V_0}{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{V_0}w}+1\right|d} \tag{3-8-11}$$

把 $w=u+\mathrm{i}v$ 代入,可得

$$|E|=\frac{2V_0}{d\sqrt{\mathrm{e}^{-2\frac{\pi}{V_0}v}+2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{V_0}v}\cos\frac{\pi u}{V_0}+1}} \tag{3-8-12}$$

下面分别讨论电容器内远离边缘处和边缘附近的电场分布情况。

把 $w=u+\mathrm{i}v$ 代入式(3-8-10),分开实部和虚部,有

$$x=\frac{d}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{V_0}v}\cos\frac{\pi u}{V_0}-\frac{\pi}{V_0}v\right) \tag{3-8-13}$$

$$y=\frac{d}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{V_0}v}\sin\frac{\pi u}{V_0}+\frac{\pi}{V_0}u\right) \tag{3-8-14}$$

在电容器内远离边缘处,即 $|y|\leqslant\frac{d}{2}$,$x\to-\infty$ 处,两式给出 $v\to\infty$,于是式(3-8-12)中的根式趋近于 1,从而有 $|E|=\frac{2V_0}{d}$。这正是平行板电容器内部在忽略边缘效应时的场强大小。

在极板边缘附近,$x\approx-\frac{d}{2\pi}$,$|y|\approx\frac{d}{2}$,式(3-8-13)和式(3-8-14)给出 $u\approx\pm V_0$,$v\approx0$,于是式(3-8-12)中的根式等于 0,故 $|E|\to\infty$。可见极板边缘是场强最大处,这体现了电场的尖端效应。在极板边缘最易发生电击穿。

为更详细地了解 $|\boldsymbol{E}|$ 的分布情况,考察场强沿一条确定的等位线(即 $u=$常数的线)的变化。

首先画出极板边缘附近的场图,如图 3-8-4 所示。把式(3-8-12)用于任一条等位线,则该式可写为

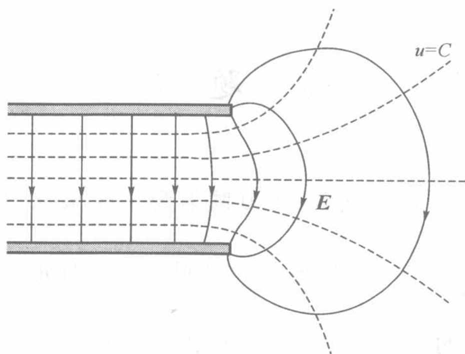


图 3-8-4　极板边缘附近的场图

$$|E|=\frac{2V_0}{d\sqrt{g(v)}} \tag{3-8-15}$$

其中

$$g(v)=\mathrm{e}^{-2\frac{\pi}{V_0}v}+2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{V_0}v}\cos\frac{\pi u}{V_0}+1 \tag{3-8-16}$$

u 为常数。显然，$g(v)$的极大(小)对应于$|E|$的极小(大)，因此，我们来考察 $g(v)$的极值。

由式(3-8-16)有

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}v}=-2\frac{\pi}{V_0}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{V_0}v}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{V_0}v}+\cos\frac{\pi u}{V_0}\right) \tag{3-8-17}$$

极值点满足$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}v}=0$，于是有

$$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{V_0}v}=-\cos\frac{\pi u}{V_0} \tag{3-8-18}$$

注意到

$$\cos\frac{\pi u}{V_0}\begin{cases}>0, & \left(|u|<\frac{V_0}{2}\right)\\ <0, & \left(\frac{V_0}{2}<|u|<V_0\right)\end{cases} \tag{3-8-19}$$

故知式(3-8-18)仅当$|u|>\frac{V_0}{2}$才有解，亦即 $g(v)$才有极值。

利用式(3-8-18)易于求得，在极值点有

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}v^2}=2\left(\frac{\pi}{V_0}\right)^2\mathrm{e}^{-2\frac{\pi}{V_0}v}>0 \tag{3-8-20}$$

故 $g(v)$只有极小值。

综上可知，沿任一等位线，$|E|$或者有极大值，或者无极值。两种情况的分界线就是等位线$|u|=\frac{V_0}{2}$。即沿此等位线，$|E|$刚好不出现极大值。这样，把极板弯成与等位面$|u|=\frac{V_0}{2}$形状相同的曲面，则极板处处$|E|$无极大值，就可以避免边缘附近的电击穿。这样的电容器称为儒可夫斯基电容器。

习　题　3

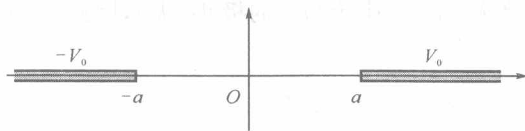
3.1　证明变换 $w=\dfrac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}z-1}$ 将区域 $\mathrm{Im}\,z\leqslant 0$ 映射为区域 $|w|\leqslant 1$。

3.2　证明变换 $w=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{2/3}$ 将区域 $|z|\leqslant 1$ 映射为一楔形区域，并画图说明。

3.3　分别求 z 平面上的圆 $x^2+y^2-4y=0$ 和 $x^2+y^2-4x=0$ 在映射 $\zeta=\dfrac{2z+3}{z-4}$ 之下的像。

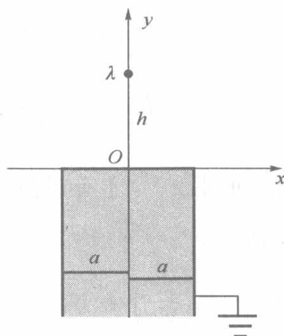
3.4　求将除去半圆域 $\begin{cases}|z|<1\\ \mathrm{Im}\,z>0\end{cases}$ 和射线 $\begin{cases}\mathrm{Re}\,z=0\\ \mathrm{Im}\,z>2\end{cases}$ 的不完整上半平面变为整个上半平面的映射。

3.5　电位分别为 V_0 和 $-V_0$ 的两个半无限大导体平板位于同一平面，相距 $2a$，如题图 3-1 所示。求此平面内的静电场分布。



题图 3-1

3.6　一块半无限大接地导体板厚度为 $2a$，其对称面为 $x=0$。在对称面上距导体板顶面为 h 处，有一根均匀带电线平行于顶面，其线电荷密度为 λ，如题图 3-2 所示。求导体对称面上导体与带电线之间(即 $x=0$，$0\leqslant y<h$ 处)的静电场。



题图 3-2

第4章 二阶线性齐次常微分方程解法概论

在电磁场理论分析中经常遇到二阶线性微分方程，常见的有勒让德(Legendre)方程、贝塞尔(Bessel)方程、韦伯(Weber)方程、厄米特(Hermite)方程、拉盖尔(Laguerre)方程、惠泰克(Whittaker)方程，等等。本章将简要介绍有关二阶线性齐次微分方程的解的一些基本概念，以及方程的一般求解方法，为后面几章关于具体方程的求解作必要的准备。

4.1 引论

4.1.1 二阶齐次方程的通解

二阶线性齐次方程的一般形式为

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0 \tag{4-1-1}$$

其中 z 一般为复数。如果已经得到方程的两个特解 u_1 和 u_2，且二者线性无关(即二者不成比例)，则方程的通解即可表示为

$$u(z)=c_1u_1(z)+c_2u_2(z) \tag{4-1-2}$$

c_1、c_2 为两个任意常数。

在简单的情况下，两个特解可由观察法得到。但有时用观察法只能得到一个特解 u_1，此时可用降阶法求出第二个特解。方法如下。

设第二解为

$$u_2(z)=u_1(z)v(z) \tag{4-1-3}$$

代入方程(4-1-1)，并记 $w=\frac{dv}{dz}$。注意到 u_1 满足方程(4-1-1)，故得到关于 w 的一阶方程：

$$\frac{dw}{dz}+P(z)w=0 \tag{4-1-4}$$

其中

$$P(z)=p(z)+\frac{2}{u_1}\frac{du_1}{dz} \tag{4-1-5}$$

为已知函数。由式(4-1-4)解得

$$w(z) = w_0 \exp\left[-\int_{z_0}^{z} P(\xi)\mathrm{d}\xi\right] \tag{4-1-6}$$

式中 w_0 即 $w(z_0)$，下同。

另一方面，对 $\mathrm{d}v = w(z)\mathrm{d}z$ 积分，有

$$v(z) = v_0 + \int_{z_0}^{z} w(z)\mathrm{d}z \tag{4-1-7}$$

把式(4-1-6)代入，再代入式(4-1-3)，可得

$$u_2(z) = u_1(z)\left\{v_0 + w_0\int_{z_0}^{z}\exp\left[-\int_{z_0}^{z} P(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}z\right\}$$

把式(4-1-5)代入上式，可以推得

$$u_2(z) = u_1(z)\left\{v_0 + A\int_{z_0}^{z}\exp\left[-\int_{z_0}^{z} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\frac{\mathrm{d}z}{[u_1(z)]^2}\right\} \tag{4-1-8}$$

其中 $A = w_0 u_1^2(z_0)$。这就得到了第二个特解。

4.1.2 级数解及其存在性

若观察法和降阶法都不能解决问题，则可考虑用级数解法，即在某点 z_0 的邻域内，将未知函数 $u(z)$ 展为泰勒级数：

$$u(z) = u(z_0) + u'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2}u''(z_0)(z-z_0)^2 + \cdots \tag{4-1-9}$$

将此代入方程(4-1-1)，比较同次幂的系数，可以得到各系数间的递推关系。只要给定初值 $u(z_0)$ 和 $u'(z_0)$，则该级数解就是确定的。说明如下。

将方程(4-1-1)改写为

$$u''(z) = f(u, u', z) \tag{4-1-10}$$

令其中 $z = z_0$，因为 $u(z_0)$ 和 $u'(z_0)$ 已经给定，故可立即得到二阶导数的初值 $u''_0 = f(u_0, u'_0, z_0)$。再对式(4-1-10)求导，可得

$$u'''(z) = f_1(u, u', u'', z) \tag{4-1-11}$$

利用已知的 u_0、u'_0、u''_0，又可以得到三阶导数的初值 $u'''_0 = f_1(u_0, u'_0, u''_0, z_0)$。依此递推，只要按这种步骤可无限地进行下去，则任意阶导数的初值皆可求得，从而级数解得以确定。

$u(z)$ 的任意阶导数都存在的点是解析点，又称方程的常点。因此，只有在常点邻域内才存在级数解。

下面作为例子，求勒让德方程在常点 $z=0$ 邻域中的级数解。

勒让德方程的形式为

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} - 2z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + \lambda(\lambda+1)u = 0 \tag{4-1-12}$$

其中 λ 为常数。

设解为

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4-1-13}$$

代入式(4-1-12)，得

$$(1-z^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} - 2z\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 \tag{4-1-14}$$

整理后得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2}-[n(n-1)+2n-\lambda(\lambda+1)]a_n\}z^n=0 \tag{4-1-15}$$

由于 z 的不同幂次相互独立，故各次幂的系数皆应为 0，由此可得递推关系如下：

$$a_{n+2}=\frac{n(n-1)+2n-\lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)}a_n=\frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \tag{4-1-16}$$

这表明，偶次项和奇次项的系数互不关联，故 u 可分解为两部分

$$u(z)=a_0u_1(z)+a_1u_2(z) \tag{4-1-17}$$

其中

$$u_1(z)=1-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}z^2+\frac{(\lambda-2)\lambda(\lambda+1)(\lambda+3)}{4!}z^4-\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k}z^{2k} \tag{4-1-18}$$

$$u_2(z)=z-\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{3!}z^3+\frac{(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+4)}{5!}z^5-\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+1}z^{2k+1} \tag{4-1-19}$$

这里 $b_{2k}=\frac{a_{2k}}{a_0}$，$b_{2k+1}=\frac{a_{2k+1}}{a_1}$。因为 u_1、u_2 的奇偶性不同，故二者线性独立。u_1 和 u_2 都有确定的奇偶性，这是因为方程(4-1-12)本身有确定的奇偶性，即若 u 为偶函数(或奇函数)，则方程中各项也皆为偶函数(或奇函数)。

易于看出，对于通解式(4-1-17)，有

$$u_0\equiv u|_{z=0}=a_0,\quad u'_0\equiv u'|_{z=0}=a_1 \tag{4-1-20}$$

故只要给定初值 u_0 和 u'_0，就可写出满足初条件的特解。

下面用检比法判断级数解的收敛域。

对于 u_1

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{2k+2}z^{2k+2}}{b_{2k}z^{2k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}z^2\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k-\lambda)(2k+1+\lambda)}{(2k+2)(2k+1)}z^2\right|=|z^2|$$

对于 u_2

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{2k+3}z^{2k+3}}{b_{2k+1}z^{2k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}}z^2\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1-\lambda)(2k+2+\lambda)}{(2k+3)(2k+2)}z^2\right|=|z^2|$$

可见两个解的收敛域都是 $|z|<1$。事实上，$z=\pm1$ 是方程的奇点，见后面例题 4-1-2，它们限制了级数解的收敛域。

利用解析延拓，可由以上解得到更大范围内适用的解。当然延拓时只能绕过奇点 $z=\pm1$。但应当指出，从同一个常点出发，沿不同路径延拓，到达同一点后，得到的结果可能会不同，这是因为两条延拓路径之间可能有奇点，使这两条路径不等价。这两种结果都是原方程的解，但其中之一却可能不满足物理上的要求。

4.1.3 方程的奇点

方程(4-1-1)的奇点就是 $p(z)$和(或)$q(z)$的奇点。

有限远点是否为奇点很易判定。但无穷远点不是一个确定的点，这导致方程的奇异性

不能直接判定。但可通过变换 $z=1/z_1$，把 $z=\infty$ 转化为确定的点 $z_1=0$，从而 $z=\infty$ 处的奇异性就是 $z_1=0$ 处的奇异性。在变换 $z=1/z_1$ 之下，方程(4-1-1)变形为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z_1^2}+p_1(z_1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z_1}+q_1(z_1)u=0 \tag{4-1-21}$$

其中

$$p_1(z_1)=\frac{2}{z_1}-\frac{1}{z_1^2}p\left(\frac{1}{z_1}\right),\quad q_1(z_1)=\frac{1}{z_1^4}q\left(\frac{1}{z_1}\right) \tag{4-1-22}$$

若 $z_1=0$ 为 $p_1(z_1)$ 和(或) $q_1(z_1)$ 的奇点，则 $z=\infty$ 就是原方程(4-1-1)的奇点。

【例 4-1-1】 找出方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}+u=0$$

的全部奇点。

解 该方程中 $p=0,q=1$，在有限远处没有奇点。

对于 $z=\infty$，由 $p_1(z_1)=\dfrac{2}{z_1}$，$q_1(z_1)=\dfrac{1}{z_1^4}$，可知 $z_1=0$ 为奇点。故 $z=\infty$ 是方程的奇点。

【例 4-1-2】 找出勒让德方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\lambda(\lambda+1)u=0$$

的全部奇点。

解 将方程与标准形式(4-1-1)相比，有

$$p(z)=-\frac{2z}{1-z^2},\quad q(z)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{1-z^2}$$

由此可知 $z=-1$ 和 $z=1$ 都是方程的奇点。此外，令 $z=1/z_1$，则方程成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z_1^2}+\frac{2z_1}{z_1^2-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z_1}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{z_1^2(z_1^2-1)}u=0$$

易见 $z_1=0$ 是 $q_1(z_1)$ 的奇点，故 $z=\infty$ 是方程的奇点。

【例 4-1-3】 找出超几何微分方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta u=0$$

的全部奇点(α、β、γ 皆为常数)。

解 对此方程

$$p(z)=\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)},\quad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

显然 $z=0$ 和 $z=1$ 是方程的奇点。又由

$$\frac{1}{z_1^4}q\left(\frac{1}{z_1}\right)=-\frac{\alpha\beta}{z_1^2(1-z_1)}$$

可知 $z_1=0$ 是奇点，故 $z=\infty$ 也是方程的奇点。

以上三个例子中，$p(z)$ 和 $q(z)$ 在 $z\to\infty$ 时皆有限，并不显示 $z=\infty$ 是方程的奇点。可见在讨论 $z=\infty$ 处是否为奇点时，作变换 $z=1/z_1$ 是非常必要的。

4.2 正则奇点邻域内的正则解

方程的奇点可能也是解的奇点。既然级数解没有奇点，因此，奇点邻域中解的形式会与级数解有所不同。在奇点邻域内，解的形式与奇点是否正则有关。如果奇点是正则的，那么就有正则解；而若奇点非正则，就只能设法寻找常规解。在电磁场分析中经常遇到求正则解的问题，因此本节将较为详细地介绍正则解。常规解将在下一节作简要介绍。

4.2.1 方程的正则奇点

设 z_r 为方程(4-1-1)的奇点。若 $(z-z_r)p(z)$ 和 $(z-z_r)^2q(z)$ 在 $z=z_r$ 处解析，则 z_r 为方程(4-1-1)的正则奇点。

若 $z=\infty$ 为方程的正则奇点，则经 $z_1=1/z$ 变换后，奇点成为 $z_1=0$。方程成为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z_1^2}+p_1(z_1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z_1}+q_1(z_1)u=0$$

从而奇点 $z=\infty$ 的正则性可由 $z_1p_1(z_1)$ 和 $z_1^2q_1(z_1)$ 在 $z_1=0$ 处是否解析而得以判断。但是，由式(4-1-22)可得

$$z_1p_1(z_1)=2-\frac{1}{z_1}p\left(\frac{1}{z_1}\right)=2-zp(z)$$

$$z_1^2q_1(z_1)=\frac{1}{z_1^2}q\left(\frac{1}{z_1}\right)=z^2q(z)$$

故 $z=\infty$ 的正则性又可由 $zp(z)$ 和 $z^2q(z)$ 是否解析而简单地判定。

【例 4-2-1】 证明勒让德方程(见 4.1 节例 4-1-2)的 3 个奇点 $z=\pm1$ 和 $z=\infty$ 皆为正则。

证 对勒让德方程

$$p(z)=-\frac{2z}{1-z^2},\quad q(z)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{1-z^2}$$

于是在 $z_r=1$ 处

$$(z-z_r)p(z)\big|_{z=1}=\left[(z-1)\frac{-2z}{1-z^2}\right]_{z=1}=\frac{2z}{1+z}\bigg|_{z=1}=1$$

$$(z-z_r)^2q(z)\big|_{z=1}=\left[(z-1)^2\frac{\lambda(\lambda+1)}{1-z^2}\right]_{z=1}=\lambda(\lambda+1)\frac{1-z}{1+z}\bigg|_{z=1}=0$$

可见 $z=1$ 是正则奇点。同样可证，$z_r=-1$ 也是正则奇点。

对于 $z_r=\infty$，由 4.1 节例 4-1-2，有

$$p_1(z_1)=\frac{2z_1}{z_1^2-1},\quad q_1(z_1)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{z_1^2(z_1^2-1)}$$

在 $z_{1r}=0$ 处

$$(z_1-0)p_1(z_1)\big|_{z_1=0}=\frac{2z_1^2}{z_1^2-1}\bigg|_{z_1=0}=0$$

$$(z_1-0)^2q_1(z_1)\big|_{z_1=0}=\frac{\lambda(\lambda+1)}{z_1^2-1}\bigg|_{z_1=0}=-\lambda(\lambda+1)$$

所以 $z_r=\infty$ 也是方程的正则奇点。

或者，由

$$zp(z)=-\frac{2z^2}{1-z^2}\bigg|_{z\to\infty}=2$$

$$z^2q(z)=\frac{\lambda(\lambda+1)z^2}{1-z^2}\bigg|_{z\to\infty}=-\lambda(\lambda+1)$$

两者皆有限，故可知 $z_r=\infty$ 是正则奇点。证完。

【例 4-2-2】 证明超几何微分方程(见 4.1 节例 4-1-3)的 3 个奇点 $z=0,1,\infty$ 皆正则。

证 对超几何微分方程

$$p(z)=\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)},\quad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

易见在 $z=0$ 处，$zp(z)$ 和 $z^2q(z)$ 皆有限；在 $z=1$ 处，$(z-1)p(z)$ 和 $(z-1)^2q(z)$ 也都有限，故 $z=0$ 和 $z=1$ 都是方程的正则奇点。

对 $z=\infty$(或 $z_1=0$)，由

$$zp(z)=\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{1-z}\bigg|_{z\to\infty}=\alpha+\beta+1$$

$$z^2q(z)=-\frac{\alpha\beta z}{1-z}\bigg|_{z\to\infty}=\alpha\beta$$

两者皆有限，所以 $z=\infty$ 也是正则奇点。证完。

4.2.2 正则解与指标方程

在正则奇点 z_r 的邻域内，形如

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_r)^{n+\rho}\tag{4-2-1}$$

的解称为方程在 z_r 邻域内的正则解。其中 ρ 为常数，称为该正则解的指标。显然，求正则解就是要确定 a_n 和 ρ。

把式(4-2-1)代入方程(4-1-1)，注意到 $(z-z_r)p(z)$ 和 $(z-z_r)^2q(z)$ 在 $z=z_r$ 处都是解析函数，故可被展开为泰勒级数：

$$(z-z_r)p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_r)^k\tag{4-2-2}$$

$$(z-z_r)^2q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_r)^k\tag{4-2-3}$$

则方程(4-1-1)成为

$$(z-z_r)^{\rho-2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left\{(n+\rho)(n+\rho-1)+\sum_{k=0}^{\infty}[(n+\rho)b_k+c_k](z-z_r)^k\right\}(z-z_r)^n=0$$

此式又可写为

$$(z-z_r)^{\rho-2}\left\{a_0[\rho(\rho-1)+b_0\rho+c_0]+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n[(n+\rho)(n+\rho-1)+b_0(\rho+n)+c_0]+\right.\right.$$
$$\left.\left.\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}[(n-k+\rho)b_k+c_k]\right\}(z-z_r)^n\right\}=0\tag{4-2-4}$$

推导由读者自己完成。因 $z\neq z_r$，故由式(4-2-4)有

$$\rho(\rho-1)+b_0\rho+c_0=0 \tag{4-2-5}$$

以及

$$a_n[(n+\rho)(n+\rho-1)+b_0(\rho+n)+c_0]=-\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}[(n-k+\rho)b_k+c_k] \tag{4-2-6}$$

式(4-2-6)即系数的递推公式。例如，令 $n=1$，则有

$$a_1[(1+\rho)\rho+b_0(\rho+1)+c_0]=-a_0(b_1\rho+c_1)$$

可见由 a_0 可得 a_1。把 a_0 和 a_1 代入式(4-2-6)，又可得 $a_2,\cdots$。显然，$a_0\neq 0$，否则将得 0 解。因此，正则解的最低次幂是 ρ。

方程(4-2-5)是确定 ρ 值的方程，故称为指标方程。其中 b_0 和 c_0 由式(4-2-2)和式(4-2-3)给出：

$$b_0=\lim_{z\to z_r}[(z-z_r)p(z)],\ c_0=\lim_{z\to z_r}[(z-z_r)^2q(z)] \tag{4-2-7}$$

4.2.3 正则解的三种情况和夫罗比尼斯法

指标方程(4-2-5)一般有两个解 ρ_1 和 ρ_2，两者之差可有三种不同情况，从而正则解也有 3 种情况。下面分别讨论。

① $\rho_1-\rho_2\neq 0$ 和整数

此时方程(4-1-1)的两个解(以下约定 u_1 和 u_2 分别对应于 ρ_1 和 ρ_2)为

$$u_1=(z-z_r)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\rho_1)(z-z_r)^n \tag{4-2-8}$$

$$u_2=(z-z_r)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\rho_2)(z-z_r)^n \tag{4-2-9}$$

由于 $\rho_1-\rho_2\neq 0$ 和整数，故 u_1 和 u_2 线性无关。

例如，设

$$p(z)=\frac{1+2z}{2z},\quad q(z)=-\frac{1}{2z^2}$$

则按式(4-2-7)，在正则奇点 $z_r=0$ 处有 $b_0=\frac{1}{2}, c_0=-\frac{1}{2}$。指标方程为

$$\rho(\rho-1)+\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{2}=0$$

解得 $\rho_1=1,\rho_2=-\frac{1}{2}$。于是有

$$u_1=z\sum_{n=0}^{\infty}[a_n|_{\rho=1}]z^n,\quad u_2=z^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}[a_n|_{\rho=-1/2}]z^n$$

显然 u_1 和 u_2 线性无关。

② $\rho_1=\rho_2$

此时用前一种方法显然只能得到一个解，不妨记为 u_1。若用降阶法求 u_2，则由式(4-1-8)可知，由于被积函数的分母中有$[u_1(z)]^2$，而 $u_1(z)$ 现在为无穷级数，这使积分难以进行，因此应采用另外的方法来寻找第二解 $u_2(z)$。

考虑函数

$$L(u)=(z-z_r)^2\left[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+q(z)u\right] \tag{4-2-10}$$

因为 $z\neq z_r$，故 $L(u)=0$ 与方程(4-1-1)等价。因此，$L(u)=0$ 的解也就是方程(4-1-1)的解。

注意到式(4-2-10)中的方括号就是式(4-2-4)的等号左边，则可知当 a_n 满足递推关系式(4-2-6)时，式(4-2-10)可写为

$$L(u)=(z-z_r)^{\rho}a_0(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2) \tag{4-2-11}$$

这里已利用指标方程将 $\rho(\rho-1)+b_0\rho+c_0$ 表示为 $(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)$。因为现在 $\rho_1=\rho_2$，故式(4-2-11)即

$$L(u)=(z-z_r)^{\rho}a_0(\rho-\rho_1)^2 \tag{4-2-12}$$

显然，$\rho=\rho_1$ 时 $L(u)=0$，这表明 $u|_{\rho_1}$ 是方程(4-1-1)的一个解。

为找到方程(4-1-1)的第二解，对式(4-2-12)求 ρ 的导数：

$$\frac{\partial}{\partial\rho}L(u)=a_0(z-z_r)^{\rho}(\rho-\rho_1)[\ln(z-z_r)(\rho-\rho_1)+2]$$

另外，由式(4-2-10)知 $L(u)$ 中仅 u 与 ρ 有关，故有 $\frac{\partial}{\partial\rho}L(u)=L(\frac{\partial u}{\partial\rho})$，因此上式可写为

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=a_0(z-z_r)^{\rho}(\rho-\rho_1)[\ln(z-z_r)(\rho-\rho_1)+2] \tag{4-2-13}$$

该式显示 $L\left(\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho_1}\right)=0$，即 $u_2(z)=\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho_1}$ 满足 $L(u)=0$，即满足方程(4-1-1)。这就得到了与 u_1 线性独立的第二个解：

$$\begin{aligned}u_2(z)&=\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_1}=\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(z-z_r)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_r)^n\right]\right\}_{\rho=\rho_1}\\&=\ln(z-z_r)u_1(z)+(z-z_r)^{\rho_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left.\frac{\partial a_n}{\partial\rho}\right|_{\rho_1}(z-z_r)^n\right]\end{aligned} \tag{4-2-14}$$

这里已注意到 a_0 是作为初始条件事先给定的，与 ρ 无关，故求和从 $n=1$ 开始。

③ $\rho_1-\rho_2=m$（m 为正整数）

在递推公式(4-2-6)中取 $\rho=\rho_2=\rho_1-m$，则得

$$\begin{aligned}&a_n[(n+\rho_1-m)(n+\rho_1-m-1)+b_0(\rho_1-m+n)+c_0]\\&=-\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}[(n-k+\rho_1-m)b_k+c_k]\end{aligned} \tag{4-2-15}$$

当 $n=m$ 时，左边成为 $a_m[\rho_1(\rho_1-1)+b_0\rho_1+c_0]$，因 ρ_1 满足指标方程，故该项为 0，从而 $n\geqslant m$ 的各系数 a_n 不能确定。所以，对于本情况，u_2 须另行确定。

令 $a_0|_{\rho_2}=a_0'(\rho-\rho_2)$，$a_0'$ 为与 ρ 无关的任意常数。代入式(4-2-11)，得

$$L(u)=(z-z_r)^{\rho}a_0'(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)^2$$

对此求 ρ 的导数，得

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=a_0'(z-z_r)^{\rho}(\rho-\rho_2)[\ln(z-z_r)(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)+(\rho-\rho_2)+2(\rho-\rho_1)]$$

当 $\rho=\rho_2$ 时，有 $L\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0$，可见第二解可取为

$$u_2(z)=\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho_2}=\ln(z-z_r)\cdot(z-z_r)^{\rho_2}\sum_{n=m}^{\infty}a_n\big|_{\rho_2}(z-z_r)^n+$$
$$(z-z_r)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{\partial a_n}{\partial \rho}\right|_{\rho_2}(z-z_r)^n \tag{4-2-16}$$

在第二个求和号中，因 $a_0(\rho)=a'_0(\rho-\rho_2)$，$\frac{\partial a_0}{\partial \rho}=a'_0\neq 0$，故求和从 $n=0$ 开始。在第一个求和号中，由于 a_n 满足递推关系式(4-2-15)，而$a_0\big|_{\rho_2}=0$，故以后各项 $a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}$ 皆为 0。但 a_m 的系数(即$[\rho_1(\rho_1-1)+b_0\rho_1+c_0]$)为 0，故 a_m 可以不为 0，以后的 $a_{m+1},a_{m+2},\cdots$ 也就不为 0，所以求和从 $n=m$ 开始。

式(4-2-16)的右边第一项与 $u_1(z)\ln(z-z_r)$ 至多只相差一个常数因子，证明如下。

记

$$\tilde{u}(z)=(z-z_r)^{\rho_2}\sum_{n'=m}^{\infty}\tilde{a}_{n'}\big|_{\rho_2}(z-z_r)^{n'}$$

利用 $\rho_2=\rho_1-m$，可将其写为

$$\begin{aligned}\tilde{u}(z)&=(z-z_r)^{\rho_1}\sum_{n'=m}^{\infty}\tilde{a}_{n'}\big|_{\rho_2}(z-z_r)^{n'-m}\\&=(z-z_r)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_{n+m}\big|_{\rho_2}(z-z_r)^{n}\end{aligned} \tag{4-2-17}$$

代入式(4-1-1)，可知 $\tilde{a}_{n+m}$满足如下的递推关系：

$$\begin{aligned}&\tilde{a}_{n+m}\big|_{\rho_2}[(n+\rho_1)(n+\rho_1-1)+b_0(\rho_1+n)+c_0]\\&=-\sum_{k=1}^{n+m}\tilde{a}_{n+m-k}[(n-k+\rho_1)b_k+c_k]\end{aligned} \tag{4-2-18}$$

与式(4-2-6)对照，可见$\tilde{a}_{n+m}\big|_{\rho=\rho_2}$与$a_n\big|_{\rho=\rho_1}$有相同的递推关系。于是，若按式(4-2-6)有

$$a_1\big|_{\rho_1}=\alpha_1\,a_0\big|_{\rho_1}$$
$$a_2\big|_{\rho_1}=\alpha_{21}a_1\big|_{\rho_1}+\alpha_{20}a_0\big|_{\rho_1}=(\alpha_{21}\alpha_1+\alpha_{20})a_0\big|_{\rho_1}=\alpha_2\,a_0\big|_{\rho_1}$$
$$\vdots$$
$$a_n\big|_{\rho_1}=\alpha_n\,a_0\big|_{\rho_1}$$

各式中 $\alpha_n=\alpha_n(\rho_1)$，则按式(4-2-18)就应有

$$\tilde{a}_{m+1}\big|_{\rho_2}=\alpha_1(\rho_1)\tilde{a}_m$$
$$\tilde{a}_{m+2}\big|_{\rho_2}=\alpha_2(\rho_1)\tilde{a}_m$$
$$\vdots$$
$$\tilde{a}_{m+n}\big|_{\rho_2}=\alpha_n(\rho_1)\tilde{a}_m$$

设$\tilde{a}_m\big|_{\rho_2}=Ca_0\big|_{\rho_1}$，$C$ 为常数，则$\tilde{a}_{m+n}\big|_{\rho_2}=C\alpha_n(\rho_1)a_0\big|_{\rho_1}=Ca_n\big|_{\rho_1}$。于是式(4-2-17)成为

$$\tilde{u}(z)=(z-z_r)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}Ca_n\big|_{\rho_1}(z-z_r)^n=Cu_1(z)$$

这就证明了式(4-2-16)中右边第一项与 $u_1(z)\ln(z-z_r)$ 至多只相差一个常数因子。

因为 C 可归入 u_1 的 a_0 中，故式(4-2-16)可写为

$$u_2(z)=u_1(z)\ln(z-z_r)+(z-z_r)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{\partial a_n}{\partial \rho}\right|_{\rho_2}(z-z_r)^n \tag{4-2-19}$$

在②、③两种情况下，通过对指标 ρ 求导而得到第二解的方法被称为夫罗比尼斯(Frobenius)法。

4.3 非正则奇点邻域内的常规解简介

4.3.1 常规解

不满足正则条件的奇点称为非正则奇点。在极点型非正则奇点的邻域内，至多有一个正则形式的解。因为，若有两个正则形式的解，该奇点就不是非正则奇点，而是正则奇点了。如果二阶方程(4-1-1)在非正则奇点不存在正则形式的解，则可尝试寻找常规解。

若 $z=\infty$ 为非正则奇点，则常规解的形式为

$$u(z)=\mathrm{e}^{Q(z)}v(z) \tag{4-3-1}$$

其中 $v(z)$ 具有正则解的形式

$$v(z)=z^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n} \tag{4-3-2}$$

$Q(z)$ 为 z 的多项式。因子 $\mathrm{e}^{Q(z)}$ 反映出 $z=\infty$ 是本性奇点这一事实。

有限远处的非正则奇点 $z=b$ 可经变换 $z_1=\dfrac{1}{z-b}$ 而变为 $z_1=\infty$，故不必另行给出有限远非正则奇点的常规解形式。

为了对常规解有所理解，让我们考察下面的一阶微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\left(\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{c}{z^3}\right)u=0 \tag{4-3-3}$$

易见 $z=0$ 是该方程的非正则奇点。将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\left(\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{c}{z^3}\right)\mathrm{d}z \tag{4-3-4}$$

两边积分，则可得

$$u=Cz^{-a}\exp\left(\frac{b}{z}+\frac{c}{2z^2}\right) \tag{4-3-5}$$

其中 C 为常数。式(4-3-5)即为常规解，其中 $z^{-a}=z_1^a$ 具有正则解的形式，$\dfrac{b}{z}+\dfrac{c}{2z^2}$ 为 $z^{-1}=z_1$ 的多项式，即式(4-3-1)中的 $Q(z_1)$。

4.3.2 二阶方程常规解的存在条件

将常规解式(4-3-1)代入二阶微分方程(4-1-1)，可以得到 $v(z)$ 满足的方程

$$v''+\tilde{p}(z)v'+\tilde{q}(z)v=0 \tag{4-3-6}$$

其中

$$\tilde{p}(z)=p(z)+2Q'(z) \tag{4-3-7}$$

$$\tilde{q}(z)=q(z)+p(z)Q'(z)+Q''(z)+[Q'(z)]^2 \tag{4-3-8}$$

因为 $v(z)$ 具有正则解的形式，按极点型正则解存在的必要条件，$\tilde{p}(z)$ 的阶必须高于 $\tilde{q}(z)$ 的阶，即若 $v(z)$ 为正则形式解

$$\tilde{p}(z)=z^{n_1}\sum_{l=0}^{\infty}a_l z^{-l},\quad \tilde{q}(z)=z^{n_2}\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^{-l}$$

则必有 $n_1>n_2$。这是一条定理，证明见《特殊函数概论》(王竹溪等著，北京大学出版社，2000，p71)。事实上，前面所讨论的正则解都服从此定理。该定理为 $Q(z)$ 的确定提供了依据。具体例子在后面介绍合流超几何方程时可以见到。

4.4 斯特姆-刘维尔型本征值问题

4.4.1 斯特姆-刘维尔型方程

在物理问题中经常要求解三维微分方程，最常用到的方法是分离变量。假定经分离变量后，得到一个二阶线性齐次方程：

$$y''(x)+p_1(x)y'(x)+[\lambda\rho_1(x)-q_1(x)]y(x)=0 \tag{4-4-1}$$

其中 λ 为分离变量时引入的参数。现以

$$\kappa(x)=\exp\int p_1(x)\mathrm{d}x \tag{4-4-2}$$

乘式(4-4-1)两端，注意到 $\kappa'(x)=\kappa(x)p_1(x)$，则可写出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\kappa(x)y'(x)]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y(x)=0 \tag{4-4-3}$$

其中 $\rho(x)=\kappa(x)p_1(x)$，$q(x)=\kappa(x)q_1(x)$。此种形式的方程称为斯特姆-刘维尔(Sturm-Liouville)型方程，简称 S-L 型方程。$\rho(x)$ 称为权函数。

物理学中遇到的许多方程都是 S-L 型方程，其中 $\kappa(x)$、$\rho(x)$、$q(x)$ 皆 $\geqslant 0$，且为实数。例如勒让德方程(4-1-12)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right]+\lambda(\lambda+1)u=0$$

显然它属于 S-L 类型，其中 $q(x)=0$，权函数 $\rho(x)=1$。其他如后面将要介绍的连带的勒让德方程，贝塞尔方程等，也都属于 S-L 型方程。

4.4.2 本征值问题

显然，方程(4-4-3)的解 $y(x)$ 与 λ 的值有关。设 $y=\psi_n(x)$ 和 $\psi_m(x)$ 分别对应于 $\lambda=\lambda_n$ 和 $\lambda=\lambda_m$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\kappa(x)\psi'_n(x)]+[\lambda_n\rho(x)-q(x)]\psi_n(x)=0 \tag{4-4-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\kappa(x)\psi'_m(x)]+[\lambda_m\rho(x)-q(x)]\psi_m(x)=0 \tag{4-4-5}$$

以 $\psi_m^*(x)$ 乘式(4-4-4)，以 $\psi_n(x)$ 乘式(4-4-5)的复共轭，所得两式相减，有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\kappa(x)[\psi_m^*(x)\psi'_n(x)-\psi_n(x)\psi'^*_m(x)\}\\&=(\lambda_m-\lambda_n)\rho(x)\psi_m^*(x)\psi_n(x)\end{aligned} \tag{4-4-6}$$

以上已注意到，物理问题中的 λ 皆为实数，故 $\lambda_m^*=\lambda_m$。

在区间 $[a,b]$ 上对式(4-4-6)积分，得

$$\left\{\kappa(x)[\psi_m^*(x)\psi'_n(x)-\psi_n(x)\psi'^*_m(x)]\right\}_a^b$$

$$= (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b \rho(x)\psi_m^*(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x \tag{4-4-7}$$

如果式(4-4-7)的左边为0,则当$\lambda_n \neq \lambda_m$时,有

$$\int_a^b \rho(x)\psi_m^*(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{4-4-8}$$

若$\psi_n(x)$与$\psi_m(x)$满足式(4-4-8),则称二者在$[a,b]$上带权正交。带权正交是使全体本征函数$\{\psi_n(x)\}$构成完备函数集的必要条件,而找到完备函数集对于分析边值问题有极其重要的意义。

在一定的边界条件下,只有当λ取某些特定值时S-L型方程才有非零解,这些特定值称问题的本征值,而相应的非零解称为边值问题的本征函数。根据边界条件求本征值和本征函数,就称为本征值问题。

S-L型方程的一个重要特点就是可以根据边界条件构造出完备的本征函数集。

4.4.3 边界条件的一般提法

如前所述,为使$\{\psi_n(x)\}$构成完备函数集,应保证式(4-4-7)的左边为0,即

$$\kappa(b)[\psi_m^*(b)\psi_n'(b)-\psi_n(b)\psi_m'^*(b)]- \kappa(a)[\psi_m^*(a)\psi_n'(a)-\psi_n(a)\psi_m'^*(a)]=0 \tag{4-4-9}$$

为使该式成立,既可以使两项分别为0,也可以使两项相互抵消。故边界条件可以有3种提法。

① 若$\kappa(a)\neq 0$,则可提齐次边界条件:

$$\alpha y'(a)+\beta y(a)=0 \tag{4-4-10}$$

α和β为与λ无关的实常数。此时有

$$\begin{cases} \psi_m^*(a)\psi_n'(a) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\psi_m^*(a)\psi_n(a) \\ \psi_n(a)\psi_m'^*(a) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\psi_n(a)\psi_m^*(a) \end{cases}$$

于是式(4-4-9)中第二项为0。

若$\kappa(b)\neq 0$,则可提类似的边界条件:

$$\gamma y'(b)+\delta y(b)=0 \tag{4-4-11}$$

从而使式(4-4-9)中第一项为0。

② 若$\kappa(a)=0$,且$x=a$是$\kappa(x)$的一阶零点,即$\kappa(x)=(x-a)\phi(x)$,$\phi(x)$连续且$\phi(a)\neq 0$,则对$x=a$可提自然边界条件:

$$y(a)\neq\infty \tag{4-4-12}$$

这时式(4-4-9)中与a点有关的项为0。

③ 若$\kappa(a)=\kappa(b)$,则可提周期性边界条件:

$$y(a)=y(b),\quad y'(a)=y'(b) \tag{4-4-13}$$

此时式(4-4-9)中两项相互抵消。

4.4.4 区间$[a,b]$上的函数$f(x)$按本征函数展开

理论已经证明(见柯朗,希尔伯特著,钱敏,郭敦仁译,数学物理方法,第一卷,1981,科

学出版社)，本征函数集在区间$[a,b]$上是完备的，即任一定义在$[a,b]$上，且与本征函数$\psi_n(x)$满足相同边界条件的光滑函数 $f(x)$，都可表示为各 $\psi_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$的线性迭加：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(x) \tag{4-4-14}$$

从物理上看，本征函数集是完备的，意味着系统所有可能的基本模式(或简正模式)已被全部包含在函数集内。

为便于求出展开系数，通常先将本征函数进行归一化。

设 $\psi_n(x)$满足

$$\int_a^b|\psi_n(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x=N_n^2\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4-4-15}$$

则可定义一族新的本征函数：

$$\Psi_n(x)=\frac{\psi_n(x)}{N_n} \tag{4-4-16}$$

这样就有

$$\int_a^b|\Psi_n(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x=1\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4-4-17}$$

$\Psi_n(x)$称为归一化的本征函数。

式(4-4-17)称为本征函数的归一化条件，它与式(4-4-8)可合写为正交归一条件：

$$\int_a^b\Psi_m^*(x)\Psi_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x=\delta_{nm} \tag{4-4-18}$$

现在将 $f(x)$用归一化本征函数集$\{\Psi_n(x)\}$展开：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Psi_n(x) \tag{4-4-19}$$

为求展开系数，以 $\rho(x)\Psi_m^*(x)$乘式(4-4-19)两边并积分，得

$$\int_a^b\rho(x)\Psi_m^*(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_a^b\Psi_m^*(x)\Psi_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x \tag{4-4-20}$$

利用式(4-4-18)，式(4-4-20)成为

$$\int_a^b\rho(x)\Psi_m^*(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\delta_{mn}=c_m \tag{4-4-21}$$

于是得

$$c_n=\int_a^b\rho(x)\Psi_n^*(x)f(x)\mathrm{d}x \tag{4-4-22}$$

若用未归一化的本征函数族$\{\psi_n(x)\}$展开，则由式(4-4-15)可得

$$a_n=\frac{1}{N_n^2}\int_a^b\rho(x)\psi_n^*(x)f(x)\mathrm{d}x \tag{4-4-23}$$

4.5 解微分方程的 WKB 近似法

一个二阶线性齐次微分方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+f(x)\psi(x)=0 \tag{4-5-1}$$

在 $f(x)$为常数时，有解

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_0\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sqrt{f}x}\ (f>0)\\ \psi_0\mathrm{e}^{\pm\sqrt{f}x}\ (f<0)\end{cases} \tag{4-5-2}$$

在波动问题中，若 $f(x)$为 x 的缓变函数(即在一个波长范围内变化很小)，则可近似地认为解仍具有以上形式，但指数因子应有所改变。按此思路，Wentzel、Kramers 和 Brillouin 各自独立地提出了相同的近似求解方法，故称 WKB 近似方法。该方法有两个要点：①方程的形式解，其中主要是指数因子的近似形式；②波函数在转折点两侧的连接公式。下面详细介绍。

4.5.1 解的基本形式

以渐变折射率光纤的径向方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\rho}+\left[k^2n^2(\rho)-\beta^2-\frac{l^2}{\rho^2}\right]\psi=0 \tag{4-5-3}$$

为例，其中 ρ 为圆柱坐标系中的径向坐标，$n(\rho)$为介质的折射率，l 为整数，$k=2\pi/\lambda$ 为真空中的波数，λ 为波长。β 与 k 有相同的量纲，它代表沿 z 方向的波数，与时空坐标无关。

设

$$\psi(\rho)=\psi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kS(\rho)} \tag{4-5-4}$$

则有

$$\psi'(\rho)=\mathrm{i}kS'(\rho)\psi(\rho) \tag{4-5-5}$$

$$\psi''(\rho)=\mathrm{i}kS''(\rho)\psi-k^2S'^2(\rho)\psi \tag{4-5-6}$$

代入方程(4-5-3)，可得关于 $S(\rho)$的方程二阶微分方程

$$\mathrm{i}kS''-k^2S'^2+\mathrm{i}\frac{k}{\rho}S'+q^2=0 \tag{4-5-7}$$

其中

$$q^2=k^2n^2(\rho)-\beta^2-\frac{l^2}{\rho^2} \tag{4-5-8}$$

现在来求 $\lambda\sim 0$ 时的近似解(即几何光学近似)。令

$$S(\rho)=S_0(\rho)+\frac{S_1(\rho)}{k}+\frac{S_2(\rho)}{k^2}+\cdots+\frac{S_j(\rho)}{k^j}+\cdots$$

因为$\frac{1}{k}=\frac{\lambda}{2\pi}$很小，故把上式代入式(4-5-7)可写出

$$\mathrm{i}k\left[S_0''+\frac{S_1''}{k}+O(k^{-2})\right]-k^2\left[S_0'^2+2\frac{S_0'S_1'}{k}+O(k^{-2})\right]+$$

$$\mathrm{i}\frac{k}{r}\left[S_0'+\frac{S_1'}{k}O(k^{-2})\right]+q^2=0 \tag{4-5-9}$$

比较 k 的同次项。注意到 q^2 与 k^2 同次，故有

k^2：
$$-k^2S_0'^2+q^2=0 \tag{4-5-10}$$

k^1：
$$\mathrm{i}kS_0''-2kS_0'S_1'+\mathrm{i}\frac{k}{\rho}S_0'=0 \tag{4-5-11}$$

$$\vdots$$

由式(4-5-10)有

$$S_0'(\rho)=\pm\frac{1}{k}q(\rho)\ (当\ q^2>0) \tag{4-5-12}$$

积分得

$$S_0(\rho)=\pm\frac{1}{k}\int q(\rho)\mathrm{d}\rho \tag{4-5-13}$$

由式(4-5-11)有

$$S_1'(\rho)=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{S_0''}{S_0'}+\frac{1}{\rho}\right)$$

积分得

$$S_1(\rho)=\frac{\mathrm{i}}{2}\ln[\rho S_0'(\rho)] \tag{4-5-14}$$

这样,在忽略了 $O(k^{-2})$ 后,就有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kS(\rho)}\approx\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left[S_0(\rho)+\frac{S_1(\rho)}{k}\right]}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\int q(\rho)\mathrm{d}\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_1(\rho)}$$

另外,由式(4-5-14)和式(4-5-12),又有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_1(\rho)}=[\rho S_0'(\rho)]^{-1/2}=\sqrt{\frac{k}{\pm q\rho}}$。把这些代入式(4-5-4),即有

$$\psi(\rho)\approx\frac{1}{\sqrt{q\rho}}\left[C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int q(\rho)\mathrm{d}\rho}+C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int q(\rho)\mathrm{d}\rho}\right]\ (当\ q^2>0) \tag{4-5-15}$$

其中 C_1、C_2 为任意常数。

式(4-5-15)即 WKB 近似解的基本形式。

4.5.2 转折点

式(4-5-8)表明,q^2 是 ρ 的函数,它可以为正,也可以为负。使 $q(\rho)=0$ 的 ρ 值称为转折点。渐变折射率光纤一般有两个转折点 ρ_1 和 ρ_2,如图 4-5-1 所示。以 ρ_1、ρ_2 为半径的圆柱面称为焦散面(caustic),在两焦散面之间,$q^2>0$,由式(4-5-15)知,在此区间,$\psi(\rho)$是振荡函数。在焦散面外,$q^2<0$,记 $q=\mathrm{i}p$,则式(4-5-15)成为

$$\psi(\rho)\approx\frac{1}{\sqrt{p\rho}}\left[D_1\mathrm{e}^{\int p(\rho)\mathrm{d}\rho}+D_2\mathrm{e}^{-\int p(\rho)\mathrm{d}\rho}\right]\ (当\ q^2<0) \tag{4-5-16}$$

故在 $q^2<0$ 的区域中,$\psi(\rho)$成为指数增加或衰减的函数。

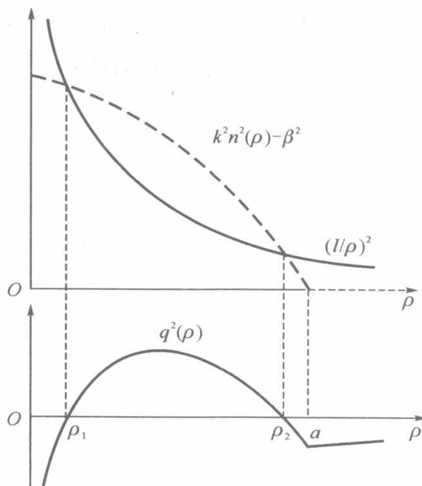


图 4-5-1 转折点与 $q^2(\rho)$

式(4-5-15)和式(4-5-16)是同一个近似解在不同区域中的表达式,故系数 C_1、C_2 和 D_1、D_2 之间必有一定的联系。但由式(4-5-10)、式(4-5-14)知,在转折点,$S\approx S_1\to\infty$,故 $\psi(\rho)$写不出来。这意味着不能按通常的方法〔即由 $\psi(\rho)$和 $\psi'(\rho)$在转折点的连续条件〕确定这些系数。

注意到除转折点外,式(4-5-15)和式(4-5-16)处处解析,二者是同一个近似解析函数在不同区域中的表

现形式，故此二式应互为解析延拓（不包括转折点）。据此可以确定各系数间的关系。

为进行解析延拓，需先将 $\psi(\rho)$ 变为在整个复平面上的函数。为此，令 $\rho=e^x$，则有 $d\rho=e^x dx$，由式(4-5-8)可写出

$$q(\rho)d\rho=Q(x)dx \tag{4-5-17}$$

其中

$$Q(x)=\{[k^2n^2(x)-\beta^2]e^{2x}-l^2\}^{1/2}=q(\rho)\rho \tag{4-5-18}$$

设 x_1、x_2 分别对应于 ρ_1、ρ_2，即 $0<\rho<\rho_1$ 对应于 $-\infty<x<x_1$，$\rho_2<\rho<\infty$ 对应于 $x_2<x<\infty$，则由于 Q^2 与 q^2 同号，可知在 $x_1<x<x_2$ 区间，$Q^2(x)>0$，而在其他两个区间，$Q^2(x)<0$，故可写出

$$Q^2(x)=\mu^2(x)(x-x_1)(x_2-x) \tag{4-5-19}$$

其中 $\mu(x)$ 为实函数。

记

$$P^2(x)=-Q^2(x) \tag{4-5-20}$$

则由式(4-5-15)和式(4-5-16)可写出三个区域中的解如下：

$$\psi(x)\approx\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}D_2e^{-\int P(x)dx} & (x<x_1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{Q(x)}}\left[C_1e^{i\int Q(x)dx}+C_2e^{-i\int Q(x)dx}\right] & (x_1<x<x_2)\\ \dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}D_1e^{\int P(x)dx} & (x>x_2)\end{cases} \tag{4-5-21}$$

这里已考虑到 ψ 在 $x\to-\infty$（即 $\rho\to0$）和 $x\to\infty$（即 $\rho\to\infty$）处应当有限，故 $x<x_1$ 和 $x>x_2$ 的解分别只保留了负指数项和正指数项。

4.5.3 解析延拓与解的确定

现在利用解析延拓确定式(4-5-21)中的各个系数。首先将 ψ 表示为 $\psi(z)$。由式(4-5-19)知 $Q(z)$ 为双值函数，$z=x_\nu(\nu=1,2)$ 是它的支点。

为方便，记

$$\psi_\nu^{(+)}=\frac{1}{\sqrt{Q(z)}}\exp\left[i\int_{x_\nu}^{z}Q(z)dz\right] \tag{4-5-22}$$

$$\psi_\nu^{(-)}=\frac{e^{-i\pi/2}}{\sqrt{Q(z)}}\exp\left[-i\int_{x_\nu}^{z}Q(z)dz\right] \tag{4-5-23}$$

$$\phi_\nu^{(+)}=\frac{e^{-i3\pi/4}}{\sqrt{P(z)}}\exp\left[\int_{x_\nu}^{z}P(z)dz\right] \tag{4-5-24}$$

$$\phi_\nu^{(-)}=\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{P(z)}}\exp\left[-\int_{x_\nu}^{z}P(z)dz\right] \tag{4-5-25}$$

因为每沿逆时针方向绕支点 x_ν 转过 π 角后，Q^2 都要改号，即 $Q(z)$ 和 $P(z)$ 的辐角都增加 $\frac{\pi}{2}$，故知上面各函数之间有如图 4-5-2 中曲线所示的解析延拓关系。图中的实线和虚线分

别在第一和第二黎曼面上。以 $\phi_1^{(-)}$ 为例。若沿逆时针延拓到 x_1 的左方实轴，则 $P(z)$ 因 $(x_1-x)^{1/2}\to e^{i\pi/2}\sqrt{x-x_1}$ 而变成 $e^{i\pi/2}Q(z)$，于是有

$$\phi_1^{(-)} \xrightarrow{\text{逆时针}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{Q(z)}}e^{-i\pi/4}\exp\left[-i\int_{x_1}^{z} Q(z)dz\right] = \psi_1^{(-)}$$

若沿顺时针方向延拓，则因 $P\to e^{-i\pi/2}Q$，有

$$\phi_1^{(-)} \xrightarrow{\text{顺时针}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{Q(z)}}e^{-i\pi/4}\exp\left[i\int_{x_1}^{z} Q(z)dz\right] = \psi_1^{(+)}$$

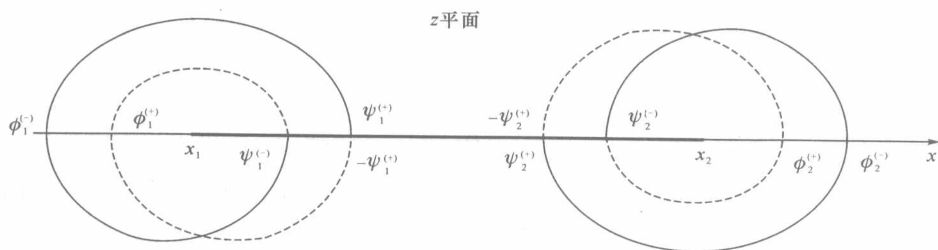


图 4-5-2 各解之间的解析延拓关系

下面从实轴上 $z=x<x_1$ 处开始进行解析延拓。为方便，取 $D_2=1$，于是有

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{P(x)}}\exp\left[-\int_{x}^{x_1} P(x)dx\right] = e^{i3\pi/4}\phi_1^{(+)}(x) \quad (x<x_1) \tag{4-5-26}$$

在 $x_1<x<x_2$ 区间，式(4-5-21)中的两线性无关项对应于 $\psi_1^{(\pm)}$。由图 4-5-2 可知，$\phi_1^{(+)}$ 沿两个方向延拓到 $x>x_1$ 的实轴上时，分别成为 $\psi_1^{(-)}$ 和 $-\psi_1^{(+)}$，故应有

$$\begin{aligned}\psi(x) &= e^{i3\pi/4}[\psi_1^{(-)}-\psi_1^{(+)}]\\ &= \frac{1}{\sqrt{Q}}\left\{e^{i\pi/4}\exp\left[-i\int_{x_1}^{x} Q(x)dx\right]+e^{-i\pi/4}\exp\left[i\int_{x_1}^{x} Q(x)dx\right]\right\}\\ &= \frac{2}{\sqrt{Q}}\cos\left[\int_{x_1}^{x} Q(x)dx-\frac{\pi}{4}\right]\end{aligned} \tag{4-5-27}$$

为继续向右延拓，按下面的方法改写 $\psi(x)$。记

$$\eta = \exp\left[i\int_{x_1}^{x_2} Q(x)dx\right] \tag{4-5-28}$$

则由式(4-5-22)和式(4-5-23)可写出

$$\psi_1^{(-)}(x)=\eta^{-1}\psi_2^{(-)}(x), \quad \psi_1^{(+)}(x)=\eta\,\psi_2^{(+)}(x) \tag{4-5-29}$$

代入式(4-5-27)第一个等号的右边，得

$$\psi(x)=e^{i3\pi/4}[\eta^{-1}\psi_2^{(-)}(x)-\eta\,\psi_2^{(+)}(x)] \quad (x_1<x<x_2) \tag{4-5-30}$$

现在把式(4-5-30)延拓到 $x>x_2$ 的实轴上来。由图 4-5-2 可知，此时有

$$\begin{aligned}\psi(x) &= e^{i3\pi/4}\left\{\eta^{-1}[\phi_2^{(-)}+\phi_2^{(+)}]-\eta[\phi_2^{(-)}-\phi_2^{(+)}]\right\}\\ &= e^{i3\pi/4}\left\{(\eta^{-1}-\eta)\phi_2^{(-)}+(\eta^{-1}+\eta)\phi_2^{(+)}\right\} \quad (x>x_2)\end{aligned} \tag{4-5-31}$$

注意到 $x\to\infty$ 时 $\phi_2^{(+)}\to\infty$，故为保证 $x\to\infty$ 时 $\psi(x)$ 有限，必须有 $\eta^{-1}+\eta=0$，即

$$\cos\int_{x_1}^{x_2} Q(x)\mathrm{d}x = 0$$

可见 $Q(x)$应满足条件

$$\int_{x_1}^{x_2} Q(x)\mathrm{d}x = (N+\frac{1}{2})\pi \quad (N=0,1,2,\cdots) \tag{4-5-32}$$

由此又有

$$\eta^{-1} - \eta = -2\mathrm{i}\sin\int_{x_1}^{x_2} Q(x)\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\,(-)^{N+1} \tag{4-5-33}$$

这样,式(4-5-31)即成为

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}\,2\mathrm{i}\,(-)^{N+1}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{P(x)}}\exp\left[-\int_{x_2}^{x} P(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= (-)^N\frac{2}{\sqrt{P(x)}}\exp\left[-\int_{x_2}^{x} P(x)\mathrm{d}x\right] \quad (x>x_2)\end{aligned} \tag{4-5-34}$$

式(4-5-26)、式(4-5-27)和式(4-5-34)就是在整个 x 实轴上(x_1、x_2 两点除外)的近似解。还原到柱坐标,即有

$$\psi(\rho) \approx \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\rho p}}\exp\left[-\displaystyle\int_{\rho}^{\rho_1} p(\rho)\mathrm{d}\rho\right] & (\rho<\rho_1) \\ \dfrac{2}{\sqrt{\rho\, q}}\cos\left[\displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho} q(\rho)\mathrm{d}\rho - \frac{\pi}{4}\right] & (\rho_1<\rho<\rho_2) \\ \dfrac{2}{(-)^N\sqrt{\rho p}}\exp\left[-\displaystyle\int_{\rho_2}^{\rho} p(\rho)\mathrm{d}\rho\right] & (\rho>\rho_2)\end{cases} \tag{4-5-35}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_{\rho_1}^{\rho_2} q(\rho)\mathrm{d}\rho &= \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[k^2n^2(\rho) - \beta^2 - \frac{l^2}{\rho^2}\right]\mathrm{d}\rho \\ &= (N+\frac{1}{2})\pi \quad (N=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{4-5-36}$$

式(4-5-36)是渐变折射率光纤的特征方程。当 $n(\rho)$给定后,方程对每一对(N,l)值给出一条色散曲线 $\beta=\beta_{N,l}(\omega)$。

最后应当指出,WKB 近似对于波长较长的情况不适用。

习　题　4

4.1　求方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} - z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + \lambda(\lambda+1)u = 0$$

的全部正则奇点和指标。

4.2　找出方程

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}-u=0$$

的全部奇点。对正则奇点则确定其指标。

4.3　完成式(4-2-4)的推导。

4.4　在 $z=0$ 邻域中求方程 $z\frac{d^2u}{dz^2}-z\frac{du}{dz}+u=0$ 的解。

第5章 超几何微分方程的正则解

电磁场分析中遇到的线性微分方程有很多都与超几何微分方程相关联，它们可以经某种变换由超几何微分方程导出。这些方程的解是一些特殊函数，它们都可以归入超几何级数的范畴。由于各种超几何微分方程之间有内在的联系，因此这些特殊函数解之间也有相互的关联。了解超几何微分方程的基本理论，有助于我们把握各种物理方程之间的联系，进而掌握这些方程的解之间的关系。物理上有意义的解有正则解，也有常规解，但常规解较少遇到，因此这里将主要介绍超几何微分方程的正则解。

5.1 超几何微分方程与超几何级数

5.1.1 三奇点福克斯型方程及其正则解的P符号表示

若某微分方程

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0 \tag{5-1-1}$$

的全部奇点皆正则，则该方程称为福克斯(Fuchs)型方程。

例如连带的勒让德方程

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]u=0 \tag{5-1-2}$$

只有三个奇点：$z=\pm1$ 和 ∞，它们都是正则奇点，故方程(5-1-2)是三奇点福克斯型方程。

对于三奇点福克斯型方程，设其三个正则奇点为 $z=a、b、c$，相应的三对指标依次为(ρ_1,ρ_2)、(ρ_3,ρ_4)、(ρ_5,ρ_6)，则方程的全体正则解可以表示为以下P符号(又称黎曼方程)：

$$u(z)=\mathrm{P}\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \rho_1 & \rho_3 & \rho_5 & ;z \\ \rho_2 & \rho_4 & \rho_6 & \end{Bmatrix} \tag{5-1-3}$$

该式虽然只是一个奇点与指标的列表，但它在求正则解中有重要的作用，利用它可以由一个奇点邻域的解简单地推出其他奇点邻域的解。

5.1.2 超几何微分方程正则解的 P 符号

超几何微分方程(hypergeometric equation)的标准形式为

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta u=0 \tag{5-1-4}$$

在 4.2 节的例 4-2-2 中已经知道它的全部奇点 $z=0,1,\infty$ 都是正则奇点，因此，超几何微分方程也属于三奇点福克斯型方程。一般的三奇点福克斯型方程可先经分式线性变换

$$\zeta=\frac{(z-a)(b-c)}{(z-c)(b-a)} \tag{5-1-5}$$

把奇点 $z=a,b,c$ 依次变换为 $\zeta=0,1,\infty$，再对函数 u 作适当变换，即可变换为超几何微分方程，故超几何微分方程是三奇点福克斯型方程的原型。因此，掌握了超几何微分方程的正则解，任何三奇点福克斯型方程的解都可容易地得到。

为写出正则解的 P 符号，须先求出全体指标。由 4.2 节已知，指标由方程

$$\rho(\rho-1)+b_0\rho+c_0=0 \tag{5-1-6}$$

决定，其中

$$b_0=\lim_{z\to z_r}[(z-z_r)p(z)],\quad c_0=\lim_{z\to z_r}[(z-z_r)^2q(z)] \tag{5-1-7}$$

对于超几何微分方程(5-1-4)而言

$$p(z)=\frac{1}{z(1-z)}[\gamma-(\alpha+\beta+1)z] \tag{5-1-8}$$

$$q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)} \tag{5-1-9}$$

下面分别写出三个奇点处的指标。

① 在 $z_r=0$ 处

$$b_0=\lim_{z\to 0}\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{1-z}=\gamma,\qquad c_0=\lim_{z\to 0}\left(-\frac{\alpha\beta z}{1-z}\right)=0$$

代入指标方程(5-1-6)，得

$$\rho_1=0,\quad \rho_2=1-\gamma \tag{5-1-10}$$

② 在 $z_r=1$ 处

$$b_0=\lim_{z\to 1}\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{-z}=\alpha+\beta+1-\gamma$$

$$c_0=\lim_{z\to 1}\frac{\alpha\beta(z-1)}{z}=0$$

代入指标方程(5-1-6)，得

$$\rho_3=0,\quad \rho_4=\gamma-\alpha-\beta \tag{5-1-11}$$

③ 在 $z_r=\infty$ 处，令 $z_1=\dfrac{1}{z}$，方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z_1^2}+p_1(z_1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z_1}+q_1(z_1)u=0 \tag{5-1-12}$$

奇点成为 $z_1=0$，于是 b_0、c_0 应分别改为

$$b_0=\lim_{z_1\to 0}[z_1p_1(z_1)],\quad c_0=\lim_{z_1\to 0}[z_1^2q_1(z_1)] \tag{5-1-13}$$

由式(4-1-22)可以求得

$$p_1(z_1)=\frac{(1-\alpha-\beta)-(2-\gamma)z_1}{z_1(1-z_1)} \tag{5-1-14}$$

$$q_1(z_1)=\frac{\alpha\beta}{z_1^2(1-z_1)} \tag{5-1-15}$$

故得

$$b_0=\lim_{z_1\to 0}\frac{(1-\alpha-\beta)-(2-\gamma)z_1}{1-z_1}=1-\alpha-\beta$$

$$c_0=\lim_{z_1\to 0}\frac{\alpha\beta}{1-z_1}=\alpha\beta$$

代入指标方程(5-1-6),得

$$\rho_5=\alpha,\quad \rho_6=\beta \tag{5-1-16}$$

把以上 $\rho_1\sim\rho_6$ 代入式(5-1-3),即得超几何微分方程正则解的 P 符号:

$$u(z)=\mathrm{P}\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & ;z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix} \tag{5-1-17}$$

易于看出,6 个指标之和为 1。

5.1.3 超几何级数

为了后面的应用,这里先介绍超几何级数。

超几何级数定义为

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n \tag{5-1-18}$$

其中符号

$$(s)_n=\begin{cases} s(s+1)\cdots(s+n-1) & (n\geqslant 1) \\ 1 & (n=0)\end{cases} \tag{5-1-19}$$

已在 2.6 节中介绍过。

超几何级数的后项与前项之比为

$$\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}z^{n+1}\Bigg/\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}z \tag{5-1-20}$$

当 $n\to\infty$ 时,右边 $\to z$,故 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 的收敛区域为 $|z|<1$。

$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 有以下几个简单性质:

①
$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)=\mathrm{F}(\beta,\alpha;\gamma;z) \tag{5-1-21}$$

②
$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;0)=1 \tag{5-1-22}$$

上述两个性质是显然的。

③
$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m}\mathrm{F}(\alpha+m,\beta+m;\gamma+m;z) \tag{5-1-23}$$

证明留作习题。

④
$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{5-1-24}$$

证明要用到超几何函数的积分表示,此处从略。

⑤ 各紧邻函数之间有以下递推关系：

$$(\gamma-1)\mathrm{F}(\gamma-1)-\alpha\mathrm{F}(\alpha+1)-(\gamma-\alpha-1)\mathrm{F}=0 \tag{5-1-25}$$

$$\gamma\mathrm{F}-\beta z\mathrm{F}(\beta+1,\gamma+1)-\gamma\mathrm{F}(\alpha-1)=0 \tag{5-1-26}$$

其中 F 即 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 的简写，而 $\mathrm{F}(\alpha\pm1)$ 则表示将 F 中的 α 改为 $\alpha\pm1$，等等。$\mathrm{F}(\alpha\pm1)$ 等称为 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 的紧邻函数，而 $\mathrm{F}(\alpha\pm l,\beta\pm m;\gamma\pm n;z)$ 称为 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 的邻次函数（l、m、n 皆为整数）。

下面证明式(5-1-25)：

$$\text{左边}=(\gamma-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(\gamma-1)_n}z^n-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_n(\beta)_n}{n!\,(\gamma)_n}z^n-(\gamma-\alpha-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(\gamma)_n}z^n$$

因为

$$\frac{\gamma-1}{(\gamma-1)_n}=\frac{\gamma-1+n}{(\gamma)_n},$$

$$\alpha(\alpha+1)_n=(\alpha)_n(\alpha+n)$$

所以

$$\text{左边}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(\gamma)_n}z^n[\gamma-1+n-(\alpha+n)-(\gamma-\alpha-1)]=0$$

式(5-1-25)得证。

式(5-1-26)的证明留作习题。

图 5-1-1 给出了几个超几何级数的图像。

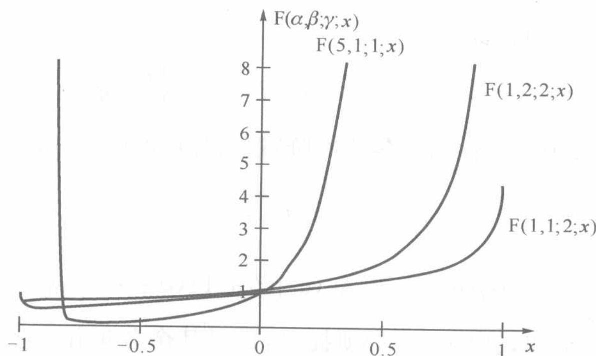


图 5-1-1　几个超几何级数的图像

5.1.4　超几何多项式

当 α 或 β 等于负整数 $(-k)$ 时，因为

$$(-k)_n=(-k)(-k+1)(-k+2)\cdots(-k+n-1)$$

$$=\begin{cases}(-k)(-k+1)\cdots(-k+k)\cdots(-k+n-1)=0 & (n>k)\\ (-)^n\dfrac{k!}{(k-n)!} & (n\leqslant k)\end{cases} \tag{5-1-27}$$

故超几何函数成为超几何多项式（又称 k 次雅可比多项式）：

$$F(-k,\beta;\gamma;z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-k)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{k} (-)^n C_k^n \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} z^n \tag{5-1-28}$$

其中 C_k^n为从 k 个元素中每次取 n 个元素的组合数：

$$C_k^n = \frac{k!}{(k-n)!\ n!} \tag{5-1-29}$$

许多常见的多项式，如勒让德多项式等，都是雅可比多项式的特殊形式。

在式(5-1-28)中令 $z=1$，并利用式(5-1-24)，可得如下求和公式：

$$\sum_{n=0}^{k} (-)^n C_k^n \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} = F(-k,\beta;\gamma;1)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{(\gamma-\beta)_k}{(\gamma)_k} \tag{5-1-30}$$

最后一步利用了公式(2-6-6)，即 $\Gamma(z+n)=(z)_n\Gamma(z)$。

5.2 $z=0$ 邻域内的正则解

在 $z=0$ 邻域内，正则解形式为

$$u(z) = z^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{5-2-1}$$

代入超几何微分方程(5-1-4)，即有

$$z(\overset{-1}{1}-\overset{0}{z})\frac{d^2u}{dz^2}+[\overset{-1}{\gamma}-(\alpha+\beta+1)\overset{0}{z}]\frac{du}{dz}-\alpha\beta\overset{0}{u}=0 \tag{5-2-2}$$

(为便于比较同次项，式中上标注明了各项的阶)根据各项的阶可立即写出

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n[(\rho+n)(\rho+n-1)+\gamma(\rho+n)]z^{\rho+n-1} -$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n[(\rho+n)(\rho+n-1)+(\alpha+\beta+1)(\rho+n)+\alpha\beta]z^{\rho+n} = 0 \tag{5-2-3}$$

为统一幂次，将第一个求和式中 $n=0$ 的项提出，再对其余各项作变换 $n=n'+1$，使得剩下的求和仍从 $n'=0$ 开始，然后再把 n' 改写为 n。这样，式(5-2-3)就写成

$$a_0[\rho(\rho-1)+\gamma\rho]z^{\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \{a_{n+1}[(\rho+n+1)(\rho+n)+\gamma(\rho+n+1)] -)$$
$$a_n[(\rho+n)^2+(\alpha+\beta)(\rho+n)+\alpha\beta]\}z^{\rho+n}=0$$

可整理为

$$a_0\rho(\rho-1+\gamma)z^{\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty}[a_{n+1}(\rho+n+1)(\rho+n+\gamma)-a_n(\rho+n+\alpha)(\rho+n+\beta)]z^{\rho+n}=0 \tag{5-2-4}$$

式(5-2-4)中 z 的各次幂系数显然应当为 0。$\rho-1$ 次项的系数为 0 给出指标方程 $\rho(\rho-1+\gamma)=0$，由此有

$$\rho_1=0, \quad \rho_2=1-\gamma \tag{5-2-5}$$

该结果已在式(5-1-10)中给出过。$\rho+n$ 次项的系数为 0 则给出递推关系

$$a_{n+1}=\frac{(\rho+n+\alpha)(\rho+n+\beta)}{(\rho+n+1)(\rho+n+\gamma)}a_n$$

由此递推，可得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{(\rho+\alpha+n)(\rho+\beta+n)}{(\rho+1+n)(\rho+\gamma+n)}\times\frac{(\rho+\alpha+n-1)(\rho+\beta+n-1)}{(\rho+n)(\rho+\gamma+n-1)}\times\cdots\times\frac{(\rho+\alpha)(\rho+\beta)}{(\rho+1)(\rho+\gamma)}a_0\\&=\frac{(\rho+\alpha)_{n+1}(\rho+\beta)_{n+1}}{(\rho+1)_{n+1}(\rho+\gamma)_{n+1}}a_0\end{aligned}\tag{5-2-6}$$

于是，对 $\rho_1=0$，有解

$$u_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n|_{\rho=0}\}z^n=a_0\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)\tag{5-2-7}$$

其中已利用 $(1)_n=n!$。

现在求对应于 $\rho_2=1-\gamma$ 的第二解。

先考虑 $\gamma\neq$ 整数的情况。在式(5-2-1)和式(5-2-6)中取 $\rho=1-\gamma$，即有

$$\begin{aligned}u_2(z)&=z^{1-\gamma}a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\gamma+\alpha)_n(1-\gamma+\beta)_n}{(1-\gamma+\gamma)_n(2-\gamma)_n}z^n\\&=a_0z^{1-\gamma}\mathrm{F}(1-\gamma+\alpha,1-\gamma+\beta;2-\gamma;z)\end{aligned}\tag{5-2-8}$$

由于通解为 $u=c_1u_1+c_2u_2$，c_1、c_2为任意常数，故可取式(5-2-7)和式(5-2-8)中 $a_0=1$。

再考虑 $\gamma=1$ 的情况。这时 $\rho_2=0=\rho_1$，故应按夫罗比尼斯法求 u_2。根据式(4-2-14)，有

$$u_2(z)=u_1(z)\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\left.\frac{\partial a_n}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}z^n\tag{5-2-9}$$

其中 $u_1(z)=\mathrm{F}(\alpha,\beta;1;z)$。

现在计算 $\frac{\partial a_n}{\partial\rho}$。按式(5-2-6)(其中 $a_0=1$，$\gamma=1$)，以及 $(z)_n=\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$，有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(\rho+\alpha)_n(\rho+\beta)_n}{(\rho+1)_n^2}\\&=\frac{\Gamma(\rho+\alpha+n)\Gamma(\rho+\beta+n)[\Gamma(\rho+1)]^2}{\Gamma(\rho+\alpha)\Gamma(\rho+\beta)[\Gamma(\rho+1+n)]^2}\end{aligned}\tag{5-2-10}$$

以此代入恒等式

$$\frac{\partial a_n}{\partial\rho}=a_n\frac{\partial\ln a_n}{\partial\rho}\tag{5-2-11}$$

的右边，则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_n}{\partial\rho}=a_n\frac{\partial}{\partial\rho}[&\ln\Gamma(\rho+\alpha+n)+\ln\Gamma(\rho+\beta+n)+2\ln\Gamma(\rho+1)\\&-\ln\Gamma(\rho+\alpha)-\ln\Gamma(\rho+\beta)-2\ln\Gamma(\rho+1+n)]\end{aligned}\tag{5-2-12}$$

根据 ψ 函数的定义：

$$\psi(\rho)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\ln\Gamma(\rho)\tag{5-2-13}$$

由式(5-2-12)和式(5-2-10)可得

$$\left.\frac{\partial a_n}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2}[\psi(\alpha+n)+\psi(\beta+n)+2\psi(1)-\psi(\alpha)-\psi(\beta)-2\psi(1+n)]\tag{5-2-14}$$

将式(5-2-14)和式(5-2-7)代入式(5-2-9)，即得

$$u_2(z)=\mathrm{F}(\alpha,\beta;1;z)\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2}[\psi(\alpha+n)+\psi(\beta+n)+2\psi(1)-\psi(\alpha)-\psi(\beta)-2\psi(1+n)]z^n \tag{5-2-15}$$

γ 为其他整数(即 $\rho_1-\rho_2$＝非零整数)时的第二解也应按夫罗比尼斯法求出，此处从略，留给读者练习。

下面给出 ψ 函数的一个计算公式：

$$\psi(\rho+1)=-\bar{\gamma}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{\rho+k}\right) \tag{5-2-16}$$

其中

$$\bar{\gamma}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\approx 0.577 \tag{5-2-17}$$

为欧拉(Euler)常数。式(5-2-16)的证明从略。由式(5-2-16)可知

$$\psi(1)=-\bar{\gamma} \tag{5-2-18}$$

此外，对 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 取对数，然后求导，则由式(5-12-13)可得

$$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z} \tag{5-2-19}$$

于是又有

$$\psi(2)=-\bar{\gamma}+1,\quad \psi(3)=\psi(2)+\frac{1}{2},\quad \psi(4)=\psi(3)+\frac{1}{3},\cdots \tag{5-2-20}$$

5.3 $z=1$ 邻域内的正则解和 P 符号的奇点变换

前已求得在 $z=0$ 邻域内的正则解。求另外两奇点邻域内的解，当然可以类似地去做，但更方便的是通过 P 符号的变换，借助于已知的 $z=0$ 邻域内的正则解而求出。

重新写出方程(5-1-4)解的 P 符号(即式(5-1-17))如下：

$$u(z)=\mathrm{P}\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix} \tag{5-3-1}$$

其中 $z_r=0$ 的解(即括号中左边第一列的解)已得到。

现在求 $z_r=1$，即中间一列的解。

首先对方程(5-1-4)作分式线性变换，使 $z=1\to z_1=0$；$z=0\to z_1=1$；$z=\infty\to z_1=\infty$。由式(5-1-5)易知该变换式即

$$z_1=1-z \tag{5-3-2}$$

显然该变换不改变各奇点的指标，故在此变换下，P 符号成为

$$u(z_1)=\mathrm{P}\begin{Bmatrix}1 & \overset{\Downarrow}{0} & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z_1\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix} \tag{5-3-3}$$

式中用 ⇓ 标出了目前欲求的正则解。

交换式(5-3-3)中第 1、2 列的顺序，然后引入记号 α', β', γ'，使与原 P 符号有相同的形式：

$$u(z_1)=P\left\{\begin{matrix} \overset{\Downarrow}{0} & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z_1 \\ \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \beta & \end{matrix}\right\}$$

$$=P\left\{\begin{matrix} \overset{\Downarrow}{0} & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha'; & z_1 \\ 1-\gamma' & \gamma'-\alpha'-\beta' & \beta' & \end{matrix}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}4)$$

比较式(5-3-4)中的两个 P 符号，得

$$\alpha'=\alpha,\quad \beta'=\beta,\quad \gamma'=1+\alpha+\beta-\gamma \qquad (5\text{-}3\text{-}5)$$

式(5-3-4)和(5-3-1)形式相同，故在变换式(5-3-2)下得到的新方程与原方程在相同邻域内的正则解形式相同。因此，对 $z_{1r}=0$（即 $z_r=1$）而 $\rho=0$，有

$$u_3(z_1)=F(\alpha',\beta';\gamma';z_1) \qquad (5\text{-}3\text{-}6)$$

利用式(5-3-5)和 $z_1=1-z$，即得

$$u_3(z)=F(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z) \qquad (5\text{-}3\text{-}7)$$

同样，把 $u_2(z)$〔见式(5-2-8)〕中的 α,β,γ 和 z 依次改为 α',β',γ' 和 $z_1=1-z$，即得 $z_r=1$ 邻域内对应于指标 $\rho=\gamma-\alpha-\beta$ 的解：

$$u_4(z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z) \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

这里已假定 γ' 或 $\gamma-\alpha-\beta\neq$整数。$\gamma'=$整数的情况分析类似于式(5-2-9)，这里从略。

5.4 $z=\infty$ 邻域内的正则解和 P 符号的指标变换

$z=\infty$ 邻域内的正则解也可经 P 符号的变换而得到，但与 $z=1$ 邻域的情况不同，这里要涉及指标的变换。下面进行详细的介绍。

先写出 $u(z)$ 的 P 符号：

$$u(z)=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \overset{\Downarrow}{\infty} & \\ 0 & 0 & \alpha; & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\} \qquad (5\text{-}4\text{-}1)$$

对方程(5-1-7)作变换 $z=\dfrac{1}{z_1}$，它使 $z_r=0,1,\infty$ 依次变换为 $z_{1r}=\infty,1,0$，但不改变各奇点的指标。故有

$$u(z_1)=P\left\{\begin{matrix} \infty & 1 & \overset{\Downarrow}{0} & \\ 0 & 0 & \alpha; & z_1 \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\} \qquad (5\text{-}4\text{-}2)$$

交换 1、3 列，得

$$u(z_1)=\mathrm{P}\begin{Bmatrix} \overset{\Downarrow}{0} & 1 & \infty & \\ \alpha & 0 & 0; & z_1 \\ \beta & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \end{Bmatrix} \tag{5-4-3}$$

该式与标准形式的差异仅在于指标。为能利用前述解 u_1 和 u_2，须对式(5-4-3)作指标变换，导出第一列与标准形式相同的 P 符号。

为将式(5-4-3)中第一列的指标换成 0，令

$$u(z_1)=z_1^{\alpha}v(z_1) \tag{5-4-4}$$

因为对 $z_{1r}=0$，有

$$u(z_1)=z_1^{\rho}\sum_n a_n z_1^n$$

故对应于指标 α 和 β，分别有

$$v(z_1)=\begin{cases} \sum\limits_n a_n z_1^n & (\rho=\alpha) \\ z_1^{\beta-\alpha}\sum\limits_n a_n z_1^n & (\rho=\beta) \end{cases} \tag{5-4-5}$$

可见 $v(z_1)$ 在 $z_{1r}=0$ 的指标为 $\rho'_1=0$，$\rho'_2=\beta-\alpha$。

下面导出 $v(z_1)$ 在其他两个奇点处的指标。

对 $z_{1r}=1$，有

$$u(z_1)=(z_1-1)^{\rho}\sum_n a_n(z_1-1)^n$$

故按式(5-4-4)，有

$$v(z_1)=z_1^{-\alpha}(z_1-1)^{\rho}\sum_n a_n(z_1-1)^n \tag{5-4-6}$$

注意 z_1-1 的幂次是指标，故知 $v(z_1)$ 在 $z_{1r}=1$ 的指标与 $u(z_1)$ 相同，即 $\rho'=0$，$\gamma-\alpha-\beta$。

对 $z_{1r}=\infty$（即 $z_r=0$），有

$$u(z_1)=\left(\frac{1}{z_1}\right)^{\rho}\sum_n a_n\left(\frac{1}{z_1}\right)^n=z_1^{-\rho}\sum_n a_n z_1^{-n}$$

故

$$v(z_1)=z_1^{-\alpha}z_1^{-\rho}\sum_n a_n z_1^{-n}=z_1^{-(\rho+\alpha)}\sum_n a_n z_1^{-n} \tag{5-4-7}$$

可见 $v(z_1)$ 在 $z_{1r}=\infty$ 的指标为 $\rho'=\rho+\alpha$。

这样，根据式(5-4-2)中 $u(z_1)$ 的相应指标 ρ，即可写出 $v(z_1)$ 的 P 符号如下：

$$v(z_1)=\mathrm{P}\begin{Bmatrix} \overset{\Downarrow}{0} & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z_1 \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma+\alpha & \end{Bmatrix} \tag{5-4-8}$$

与 P 符号的标准形式

$$\mathrm{P}\begin{Bmatrix} \overset{\Downarrow}{0} & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha'; & z_1 \\ 1-\gamma' & \gamma'-\alpha'-\beta' & \beta' & \end{Bmatrix}$$

相对照，有

$$\alpha'=\alpha,\quad \beta'=1+\alpha-\gamma,\quad \gamma'=1+\alpha-\beta \tag{5-4-9}$$

于是，按式(5-2-7)和式(5-2-8)，有

$$v_1(z_1)=\mathrm{F}(\alpha',\beta';\gamma';z_1)=\mathrm{F}(\alpha,1+\alpha-\gamma;1+\alpha-\beta;z_1) \tag{5-4-10}$$

$$\begin{aligned} v_2(z_1)&=z_1^{1-\gamma'}\mathrm{F}(1-\gamma'+\alpha',1-\gamma'+\beta';2-\gamma';z_1)\\ &=z_1^{\beta-\alpha}\mathrm{F}(\beta,1+\beta-\gamma;1+\beta-\alpha;z_1) \end{aligned} \tag{5-4-11}$$

代入式(5-4-4)，即得

$$u_5(z)=z_1^{\alpha}v_1(z_1)=z^{-\alpha}\mathrm{F}\left(\alpha,1+\alpha-\gamma;1+\alpha-\beta;\frac{1}{z}\right) \tag{5-4-12}$$

$$u_6(z)=z_1^{\alpha}v_2(z_1)=z^{-\beta}\mathrm{F}\left(\beta,1+\beta-\gamma;1+\beta-\alpha;\frac{1}{z}\right) \tag{5-4-13}$$

以上只针对一个奇点作了指标的变换。一般情况下，若

$$u(z)=\mathrm{P}\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \rho_1 & \rho_3 & \rho_5; & z\\ \rho_2 & \rho_4 & \rho_6 & \end{matrix}\right\} \tag{5-4-14}$$

$$v(z)=\mathrm{P}\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \rho_1-k & \rho_3-l & \rho_5+(k+l); & z\\ \rho_2-k & \rho_4-l & \rho_6+(k+l) & \end{matrix}\right\} \tag{5-4-15}$$

则

$$u(z)=\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^k\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^l v(z) \tag{5-4-16}$$

根据指标的含义以及本节前面的分析，不难理解此式。

若 $c=\infty$，则式(5-4-16)中分母 $(z-c)$ 改为 1。

例如由式(5-4-3)到式(5-4-8)的变换，令式(5-4-15)中 $\rho_1-k=\alpha-k=0$，于是有 $k=\alpha$。由于 $z_{1r}=1$ 的指标不变，故 $l=0$。这样就有

$$v(z_1)=\mathrm{P}\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z_1\\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma+\alpha & \end{matrix}\right\}$$

这就是式(5-4-8)。在式(5-4-16)中将 z 换为 z_1，即给出式(5-4-4)。

总之，利用 P 符号的变换，可由一个奇点的正则解推知其他两奇点的正则解。

利用 P 符号的变换还可把一个正则解写为另外的形式。以 u_1 为例，先对 P 符号作指标变换如下：

$$\begin{aligned} u(z)&=\mathrm{P}\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\}\\ &=(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{P}\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & \alpha+\beta-\gamma & \gamma-\beta; & z\\ 1-\gamma & 0 & \gamma-\alpha & \end{matrix}\right\} \end{aligned}$$

注意到 P 符号中属于同一奇点的两个指标可以互换位置，故上式可写为

$$u(z)=(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{P}\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma-\alpha; & z \\ 1-\gamma & \alpha+\beta-\gamma & \gamma-\beta & \end{Bmatrix}$$

$$=(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{P}\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha'; & z \\ 1-\gamma' & \gamma'-\alpha'-\beta' & \beta' & \end{Bmatrix} \tag{5-4-17}$$

式中最后的 P 符号是用来比较的标准形式。比较两个 P 符号可得，$\alpha'=\gamma-\alpha$，$\beta'=\gamma-\beta$，$\gamma'=\gamma$。

现在可以写出 u_1 在上述指标变换下的函数形式。用方括号标出 u_1 在式(5-4-17)P 符号中对应的指标，就有

$$u_1(z)=\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

$$=(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{P}\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ [0] & 0 & \alpha'; & z \\ 1-\gamma' & \gamma'-\alpha'-\beta' & \beta' & \end{Bmatrix}$$

$$=(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{F}(\alpha',\beta';\gamma';z)$$

$$=(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{F}(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z) \tag{5-4-18}$$

还可类似地写出其他的一些等价的形式。在应用中，可根据需要选取适当的表达式。

习　题　5

5.1　证明 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 的性质 3，即式(5-1-23)。

5.2　证明递推关系式(5-1-26)。

5.3　写出 $u_2(z)$ 与式(5-4-18)相应的形式。

第 6 章　勒让德方程与勒让德函数

6.1　电磁场问题与勒让德方程

6.1.1　场方程的分离变量

在讨论无源区的静电场时，会遇到拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{6-1-1}$$

在讨论无源区的稳恒电磁波时，则会遇到亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \tag{6-1-2}$$

以上 ψ 代表电势，是一标量函数，k 为常数。显然可以式(6-1-2)为代表统一地讨论以上两式。

在球坐标系(r,θ,φ)中

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{6-1-3}$$

令

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{6-1-4}$$

则方程(6-1-2)可分解为 3 个：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + [k^2 r^2 - l(l+1)]R = 0 \tag{6-1-5}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \tag{6-1-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2\Phi \tag{6-1-7}$$

其中 m 和 l 都是分离方程时引入的待定常数。

方程(6-1-7)的解是

$$\Phi(\varphi) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}m\varphi} \tag{6-1-8}$$

由于 ψ 关于 φ 应是单值的：$\Phi(\varphi+2n\pi)=\Phi(\varphi)$，故只能取 $m=0,1,2,\cdots$。这是本征值问题的一个例子。m 反映了场关于 z 轴的对称性质。

这样，在方程(6-1-6)中，m 为整数。令 $\zeta=\cos\theta$，并改记 $\Theta(\theta)$ 为 $u(\zeta)$，则有

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta},\ \sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=-(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}$$

于是方程(6-1-6)即化为连带的(associated)勒让德(Legendre)方程：

$$(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}-2\zeta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]u=0 \tag{6-1-9}$$

若方程中 $m=0$，则方程称为勒让德方程。

记勒让德方程和连带的勒让德方程的解分别为 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 和 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$，即有

$$(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{P}_l}{\mathrm{d}\zeta^2}-2\zeta\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_l}{\mathrm{d}\zeta}+l(l+1)\mathrm{P}_l=0 \tag{6-1-10}$$

$$(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{P}_l^m}{\mathrm{d}\zeta^2}-2\zeta\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_l^m}{\mathrm{d}\zeta}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]\mathrm{P}_l^m=0 \tag{6-1-11}$$

$\mathrm{P}_l(\zeta)$ 和 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 分别被称为 l 次勒让德函数和 m 阶 l 次的连带勒让德函数。这两个函数常在球坐标系中遇到：$\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 和 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 分别对应于轴对称和非轴对称的场分布。显然，$m=0$ 时，$\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 就是 $\mathrm{P}_l(\zeta)$。

还有第二类勒让德函数 $\mathrm{Q}_l(\zeta)$ 和连带的勒让德函数 $\mathrm{Q}_l^m(\zeta)$，但由于物理问题中很少用到它们，故本书只介绍第一类。

6.1.2 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 和 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 的一般关系

用数学归纳法很易证明以下莱布尼兹(Leibniz)公式：

$$[(1-\zeta^2)u'']^{(m)}=(1-\zeta^2)[u^{(m)}]''-2m\zeta[u^{(m)}]'-m(m-1)u^{(m)} \tag{6-1-12}$$

$$(\zeta u)^{(m)}=mu^{(m-1)}+\zeta u^{(m)} \tag{6-1-13}$$

上标 (m) 表示求 m 阶导数。

现在对式(6-1-10)求 m 阶导数。利用式(6-1-12)和(6-1-13)，可得

$$(1-\zeta^2)[\mathrm{P}_l^{(m)}]''-2(m+1)\zeta[\mathrm{P}_l^{(m)}]'+[l(l+1)-m(m+1)]\mathrm{P}_l^{(m)}=0 \tag{6-1-14}$$

另一方面，若设

$$\mathrm{P}_l^m(\zeta)=(1-\zeta^2)^{m/2}y(\zeta) \tag{6-1-15}$$

则有

$$[\mathrm{P}_l^m(\zeta)]'=\left(\frac{-m\zeta}{1-\zeta^2}+\frac{y'}{y}\right)\mathrm{P}_l^m$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{P}_l^m(\zeta)]''&=\left(\frac{-m\zeta}{1-\zeta^2}+\frac{y'}{y}\right)'\mathrm{P}_l^m+\left(\frac{-m\zeta}{1-\zeta^2}+\frac{y'}{y}\right)^2\mathrm{P}_l^m\\&=\left[\frac{-m}{1-\zeta^2}+\frac{y''}{y}+\frac{m(m-2)\zeta^2}{(1-\zeta^2)^2}-\frac{2m\zeta}{1-\zeta^2}\frac{y'}{y}\right]\mathrm{P}_l^m\end{aligned}$$

代入式(6-1-10)，可得 $y(\zeta)$ 所满足的方程：

$$(1-\zeta^2)y''-2(m+1)\zeta y'+[l(l+1)-m(m+1)]y=0 \tag{6-1-16}$$

比较式(6-1-14)和式(6-1-16)，可知 $y=C\mathrm{P}_l^{(m)}$（C 为任意常数）。代入式(6-1-15)并取 $C=1$，则得

$$\mathrm{P}_l^m(\zeta)=(1-\zeta^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(\zeta) \tag{6-1-17}$$

$m=0$ 时，式(6-1-10)与式(6-1-11)相同，由此知 $\mathrm{P}_l^0(\zeta)=\mathrm{P}_l(\zeta)$。故式(6-1-17)对 $m=0$ 同样

成立，它就是 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 和 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 间的一般关系式（注意，这里 m 不能为负）。

需要指出的是，上面取 $C=1$ 采用的是费瑞尔（Ferrer）的定义。若按霍布森（Hobson）的定义，则 $C=(-)^m$。

6.2 奇点邻域内的正则解

6.2.1 正则解的 P 符号

易于得知，方程(6-1-9)共有 3 个奇点：$\zeta_r=\pm 1, \infty$，且皆正则，故属于三奇点福克斯型方程，其全体正则解可借助于超几何方程的正则解和 P 符号得到。下面先写出方程(6-1-9)的全体指标。

对方程(6-1-9)而言，有

$$p(\zeta)=-\frac{2\zeta}{1-\zeta^2}, \quad q(\zeta)=\frac{1}{1-\zeta^2}\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right] \tag{6-2-1}$$

由此知，对 $\zeta_r=1$，有

$$b_0=1, \quad c_0=-\frac{m^2}{4} \tag{6-2-2}$$

代入指标方程

$$\rho(\rho-1)+b_0\rho+c_0=0 \tag{6-2-3}$$

可得

$$\rho_1=\frac{m}{2}, \quad \rho_2=-\frac{m}{2} \tag{6-2-4}$$

同样可得，对 $\zeta_r=-1$，有 $b_0=1$，$c_0=-\dfrac{m^2}{4}$，故

$$\rho_3=\frac{m}{2}, \quad \rho_4=-\frac{m}{2} \tag{6-2-5}$$

为求 $\zeta_r=\infty$ 处的指标，对方程(6-1-9)作变换 $\zeta_1=\dfrac{1}{\zeta}$，可知新方程中

$$p_1(\zeta_1)=\frac{2\zeta_1}{\zeta_1^2-1}, \quad q_1(\zeta_1)=\frac{1}{\zeta_1^2-1}\left[\frac{l(l+1)}{\zeta_1^2}-\frac{m^2}{\zeta_1^2-1}\right] \tag{6-2-6}$$

于是对 $\zeta_r=\infty$，即 $\zeta_{1r}=0$，有

$$b_{10}=0, \quad c_{10}=-l(l+1) \tag{6-2-7}$$

代入指标方程(6-2-3)（式中 b_0、c_0 分别改为 b_{10}、c_{10}），得到

$$\rho_5=l+1, \quad \rho_6=-l \tag{6-2-8}$$

综上可得正则解的 P 符号：

$$u(\zeta)=\mathrm{P}\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2} & l+1; & \zeta \\ -\frac{m}{2} & -\frac{m}{2} & -l & \end{Bmatrix} \tag{6-2-9}$$

$m=0$ 时，式(6-2-9)给出勒让德方程(6-1-10)的正则解。

6.2.2 $\zeta=1$ 邻域内的正则解

现在利用 P 符号的变换，求 $\zeta=1$ 邻域内的正则解。

首先把奇点变换为 $0,1,\infty$。为此，只需令

$$\zeta'=\frac{1-\zeta}{2} \tag{6-2-10}$$

式(6-2-9)即可写为

$$u(\zeta)=\mathrm{P}\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2} & l+1; & \frac{1-\zeta}{2} \\ -\frac{m}{2} & -\frac{m}{2} & -l & \end{Bmatrix} \tag{6-2-11}$$

注意式中的奇点是属于 $\zeta'=(1-\zeta)/2$ 的。对于 $m>0$，在 $\zeta=1$ 和 $\zeta=-1$ 处，第二个解发散。

为将 P 符号与超几何方程的 P 符号对应起来，作指标变换：

$$\begin{aligned} u(\zeta)&=\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1-\zeta}{2}-1\right)^{\frac{m}{2}}\mathrm{P}\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & l+1+m; & \frac{1-\zeta}{2} \\ -m & -m & -l+m & \end{Bmatrix} \\ &=\frac{(-)^{\frac{m}{2}}}{2^m}(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{P}\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & l+1+m; & \frac{1-\zeta}{2} \\ -m & -m & -l+m & \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{6-2-12}$$

将式中的 P 符号与标准形式

$$\mathrm{P}\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha; & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix} \tag{6-2-13}$$

相对照，即有

$$\alpha=l+1+m,\quad \beta=-l+m,\quad \gamma=1+m,\quad z=\frac{1-\zeta}{2} \tag{6-2-14}$$

因此，对式(6-2-9)中第一列的第一个指标$\left(\zeta_r=1,\ \rho_1=\frac{m}{2}\right)$，有解

$$\begin{aligned} u_1(\zeta)&=C_m(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z) \\ &=C_m(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{F}\left(l+1+m,-l+m;1+m;\frac{1-\zeta}{2}\right) \end{aligned} \tag{6-2-15}$$

这里 C_m 为任意常数。

其他正则解可仿此得到，不再赘述。

在式(6-2-15)中令 $m=0$，$C_0=1$，即给出勒让德函数：

$$\mathrm{P}_l(\zeta)=\mathrm{F}\left(l+1,-l;1;\frac{1-\zeta}{2}\right)\quad (|\zeta-1|<2) \tag{6-2-16}$$

它仅在 $|\zeta-1|<2$ 内收敛。因为 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;0)=1$，故 $\mathrm{P}_l(1)=1$。如果 $\zeta=\cos\theta$，则式

(6-2-16)的收敛域为 $0\leqslant\theta<\pi$。当 l 为整数时,式(6-2-16)称为勒让德函数的末菲(Murphy)表达式,它是一个 l 次的多项式,见 6.3 节。

与第一解线性无关的第二解为第二类勒让德函数 $Q_l(\zeta)$ 和第二类连带的勒让德函数 $Q_l^m(\zeta)$,它们在 $\zeta=\pm1$ (或 $\theta=0$ 和 π)发散,表达式从略。

当 $m\neq0$ 时,式(6-2-15)中的 $u_1(\zeta)$ 即 $P_l^m(\zeta)$,但其系数 C_m 应根据式(6-1-17)由 $P_l(\zeta)$ 确定。

首先,利用公式(5-1-23),即

$$F^{(m)}(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)=\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m}F(\alpha+m,\beta+m;\gamma+m;\zeta) \tag{6-2-17}$$

以及 $(1)_m=m!$,有

$$P_l^{(m)}(\zeta)=\frac{(l+1)_m(-l)_m}{m!}\left(-\frac{1}{2}\right)^mF\left(l+1+m,-l+m;1+m;\frac{1-\zeta}{2}\right) \tag{6-2-18}$$

又因为

$$(l+1)_m=\frac{\Gamma(l+1+m)}{\Gamma(l+1)},\ (-l)_m=(-)^m\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+1-m)}$$

故有

$$P_l^{(m)}(\zeta)=\frac{1}{2^mm!}\frac{\Gamma(l+1+m)}{\Gamma(l+1-m)}F\left(l+1+m,-l+m;1+m;\frac{1-\zeta}{2}\right) \tag{6-2-19}$$

再利用式(6-1-17),即可得到

$$P_l^m(\zeta)=\frac{1}{2^mm!}\frac{\Gamma(l+1+m)}{\Gamma(l+1-m)}(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}F\left(l+1+m,-l+m;1+m;\frac{1-\zeta}{2}\right)\quad(|\zeta-1|<2) \tag{6-2-20}$$

6.3 勒让德多项式与连带的勒让德多项式

$\zeta=0$ 是方程(6-1-9)的常点。在 $\zeta=0$ 邻域内勒让德方程的级数解已在 4.1 节中讨论过,而连带的勒让德方程的级数解可通过式(6-1-17)由前者得到,故不必重新推导。我们已经知道,勒让德方程的级数解的收敛域为 $|\zeta|<1$,但物理学问题通常要求方程的解在 $|\zeta|=1$ 收敛(按 $\zeta=\cos\theta$,即要求在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 收敛),因此上述无穷级数解不能满足要求。本节将从级数解中选出在 $|\zeta|=1$ 处收敛的解,这就是勒让德多项式和连带的勒让德多项式。

6.3.1 勒让德多项式 $P_l(\zeta)$

在 4.1 节中已经得知,勒让德方程在常点 $\zeta=0$ 邻域内的级数解为:

$$u_1(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}\zeta^{2k},\ u_2(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}\zeta^{2k+1} \tag{6-3-1}$$

其中各系数满足递推公式

$$a_{n+2}=\frac{(n-l)(n+l+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \tag{6-3-2}$$

由此递推公式知，若 l 为整数：$l=0,1,2,\cdots$，则当 $n=l$ 时，有 $a_{l+2}=0$，从而 $a_{l+4}=a_{l+6}=\cdots=0$。故当 l 为偶数（即 $l=2N$，$N=0,1,2,\cdots$）时，式(6-3-1)中偶次幂级数成为多项式，其最高幂次为 $2N$，而奇次幂级数则仍为无穷级数。为保证解在 $|\zeta|=1$ 收敛，只需令 $a_1=0$。当 l 为奇数（即 $l=2N+1$）时，式(6-3-1)中奇次幂级数成为多项式，其最高幂次为 $2N+1$，而偶次幂级数仍为无穷级数。此时要使解在 $|\zeta|=1$ 收敛，只需令 $a_0=0$。

总之，要满足 $|\zeta|=1$ 处收敛的要求，l 只能取整数，而且 $u_1(\zeta)$ 和 $u_2(\zeta)$ 只能一个为 l 次的多项式，而另一个则必须被舍弃。

这样得到的多项式称为勒让德多项式，仍记为 $\mathrm{P}_l(\zeta)$：

$$\mathrm{P}_l(\zeta)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{N} a_{2k}\zeta^{2k} & (l=2N)\\ \sum\limits_{k=0}^{N} a_{2k+1}\zeta^{2k+1} & (l=2N+1)\end{cases}\tag{6-3-3}$$

此两式可经下标变换合而为一：对于 $l=2N$，令 $2p=l-2k$，则有 $2k=l-2p$；对于 $l=2N+1$，令 $2p=l-2k-1$，则有 $2k+1=l-2p$。于是式(6-3-3)成为

$$\mathrm{P}_l(\zeta)=\sum_{p=0}^{N} a_{l-2p}\zeta^{l-2p}\quad\left[N=\begin{cases}l/2 & (l=0,2,4,\cdots)\\ (l-1)/2 & (l=1,3,5,\cdots)\end{cases}\right]\tag{6-3-4}$$

注意该式中 $p=0$ 为最高次项，$p=N$ 为最低次项。

下面确定式(6-3-4)中的展开系数。根据式(6-3-2)，只要确定最高次项的系数 a_l，则各低次项系数都可由此倒推出来。

为确定 a_l，先考虑式(6-2-16)。当 l 为整数时，式(6-2-16)成为 $\frac{1-\zeta}{2}$ 的 l 次多项式〔即 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的索末菲表达式〕，这是因为展开式中 $l+1$ 次项的系数因为分子中

$$(-l)_{l+1}=(-l)(-l+1)\cdots(-l+l)=0$$

而成为 0，其他更高次项的系数也都是 0。因为其最高次项为

$$\frac{(l+1)_l\,(-l)_l}{l!\,(1)_l}\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^l=(-)^l\frac{(2l)!}{(l!)^2}\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^l$$

故若把该多项式改写为 ζ 的 l 次多项式，则 ζ^l 的系数为 $\frac{(2l)!}{2^l\,(l!)^2}$。现规定式(6-3-4)与式(6-2-16)一样，都满足 $\mathrm{P}_l(1)=1$，则两者的各对应项系数显然应相同，由此知

$$a_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\tag{6-3-5}$$

下面写出各低次项系数。首先将式(6-3-2)写为

$$a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{(n-l)(n+l+1)}a_{n+2}$$

然后，依次令式中 $n=l-2,\ l-4,\cdots$，则可写出

$$a_{l-2}=\frac{l(l-1)}{(-2)(2l-1)}a_l$$

$$a_{l-4}=\frac{l(l-1)}{(-2)(2l-1)}\cdot\frac{(l-2)(l-3)}{(-4)(2l-3)}a_l$$

$$\vdots$$

$$a_{l-2p}=\frac{l(l-1)\cdots[l-(2p-1)]}{(-)^p 2^p p!\ (2l-1)(2l-3)\cdots[2l-(2p-1)]}a_l$$

把式(6-3-5)代入,又注意到

$$l(l-1)\cdots(l-2p+1)=\frac{l!}{(l-2p)!}$$

而

$$\begin{aligned}(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2p+1)&=\frac{(2l)!}{2l(2l-2)(2l-4)\cdots[2l-2(p-1)](2l-2p)!}\\&=\frac{(2l)!}{2^p l(l-1)(l-2)\cdots(l-p+1)(2l-2p)!}\\&=\frac{(2l)!\ (l-p)!}{2^p l!\ (2l-2p)!}\end{aligned}$$

即可得到

$$a_{l-2p}=\frac{(-)^p(2l-2p)!}{2^l p!\ (l-p)!\ (l-2p)!}$$

以此代入式(6-3-4),即得

$$\mathrm{P}_l(\zeta)=\frac{1}{2^l}\sum_{p=0}^{N}\frac{(-)^p(2l-2p)!}{p!(l-p)!(l-2p)!}\zeta^{l-2p} \tag{6-3-6}$$

式中,对 $l=0,2,4,\cdots$, $N=l/2$;对 $l=1,3,5,\cdots$, $N=(l-1)/2$。

$\mathrm{P}_l(\zeta)$ 有以下特点。

① $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的奇偶性即 l 的奇偶性。

② $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 是 l 次多项式,故有 l 个零点。

③ 对 $l=1,3,5,\cdots$,有 $\mathrm{P}_l(0)=0$,这是奇函数的特点;而对 $l=0,2,4,\cdots$,则有

$$\mathrm{P}_l(0)=\frac{(-)^{l/2}(l)!}{2^l[(l/2)!]^2}$$

这是因为当 l 为偶数时, $\mathrm{P}_l(0)$ 中只有零次项不为 0,而零次项对应于 $l=2p$,由式(6-3-6)可知有此式。

④ $\mathrm{P}_l(1)\equiv1$。这是由式(6-3-5)所保证的。

几个较低次数的勒让德多项式列于下面:

$$\mathrm{P}_0(x)=1$$

$$\mathrm{P}_1(x)=x$$

$$\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$\mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$\mathrm{P}_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

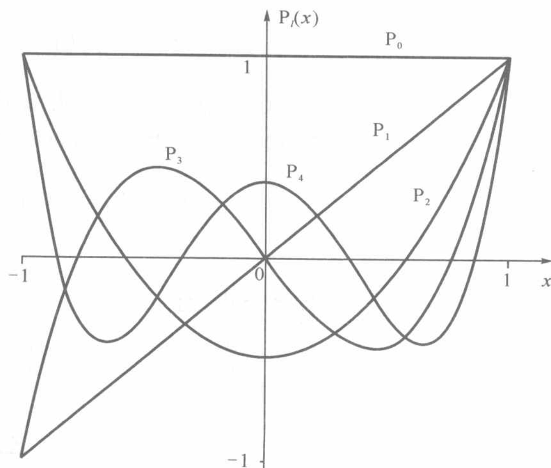


图 6-3-1 几个低次数的勒让德多项式

它们的曲线如图 6-3-1 所示。

另外,式(6-3-6)还可表示为罗巨格(Rodrigues)公式:

$$\mathrm{P}_l(\zeta)=\frac{1}{2^l l\,!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\zeta^l}(\zeta^2-1)^l \tag{6-3-7}$$

只要利用二项展开式

$$(\zeta^2-1)^l=\sum_{k=0}^{l}(-)^k C_l^k \zeta^{2(l-k)} \tag{6-3-8}$$

即可证明式(6-3-7)与式(6-3-6)相同。证明留作习题。

6.3.2 连带的勒让德多项式 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 与 $\mathrm{P}_l^{-m}(\zeta)$

根据式(6-1-17)可由 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 得到 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$,例如:

$$\mathrm{P}_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}$$

$$\mathrm{P}_2^1(x)=3x\,(1-x^2)^{1/2}$$

$$\mathrm{P}_2^2(x)=3(1-x^2)$$

$$\mathrm{P}_3^1(x)=\frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(5x^2-1)$$

$$\mathrm{P}_3^2(x)=15x(1-x^2)$$

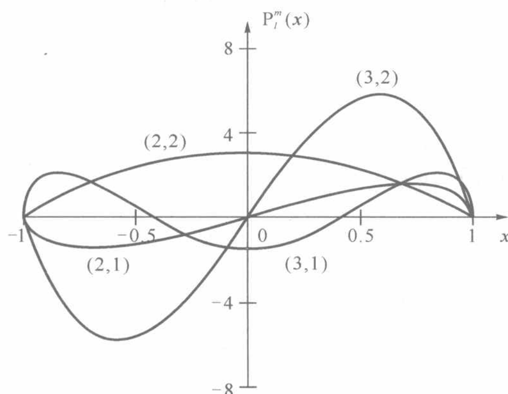


图 6-3-2 连带的勒让德多项式的函数图像

图 6-3-2 给出了几个 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的函数图像。图中曲线旁的数字代表 (l,m)。

以上均假定 $m\geqslant0$。但是,注意到把方程(6-1-9)中的 m 换为 $-m$ 后方程不变,故在方程的解中把 m 换为 $-m$ 也应是方程的解。但按式(6-1-17),$m<0$ 将导致无意义的负导数,因此不能直接利用式(6-1-17)求 $m<0$ 时的 $\mathrm{P}_l^m(x)$。这个困难可以用下面的方法加以解决。

首先,利用式(6-3-7)可将式(6-1-17)表示为

$$\mathrm{P}_l^m(\zeta)=\frac{1}{2^l l\,!}(1-\zeta^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l \tag{6-3-9}$$

将此式中的 m 换为 $-m$,有

$$\mathrm{P}_l^{-m}(\zeta)=\frac{1}{2^l l\,!}(1-\zeta^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}\zeta^{l-m}}(\zeta^2-1)^l \tag{6-3-10}$$

只要 $|m|\leqslant l$,上式的导数就有意义,从而这个解存在。事实上,按式(6-3-10)定义的 $\mathrm{P}_l^{-m}(\zeta)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 只相差一个常数,二者的关系是

$$\mathrm{P}_l^{-m}(\zeta)=(-)^m\frac{(l-m)\,!}{(l+m)\,!}\mathrm{P}_l^m(\zeta) \tag{6-3-11}$$

证明如下。

根据莱布尼兹求导公式,有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l&=\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}[(\zeta-1)^l(\zeta+1)^l]\\&=\sum_{k=0}^{l+m}C_{l+m}^k\frac{\mathrm{d}^k(\zeta-1)^l}{\mathrm{d}\zeta^k}\frac{\mathrm{d}^{l+m-k}(\zeta+1)^l}{\mathrm{d}\zeta^{l+m-k}}\end{aligned} \tag{6-3-12}$$

求和项中两个导数同时不为 0 的条件是 $k\leqslant l$ 和 $m-k\leqslant0$,即 $k\geqslant m$,故上式的求和范围实

际上是 $m\leqslant k\leqslant l$。将两个导数写出，上式成为

$$\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l=\sum_{k=m}^{l}C_{l+m}^{k}\frac{l!(\zeta-1)^{l-k}}{(l-k)!}\frac{l!(\zeta+1)^{k-m}}{(k-m)!}$$

作指标代换 $n=k-m$，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l&=\sum_{n=0}^{l-m}C_{l+m}^{n+m}\frac{l!(\zeta-1)^{l-n-m}}{(l-n-m)!}\frac{l!(\zeta+1)^{n}}{n!}\\&=(\zeta^2-1)^{-m}\sum_{n=0}^{l-m}C_{l+m}^{n+m}\frac{l!(\zeta-1)^{l-n}}{(l-n-m)!}\frac{l!(\zeta+1)^{n+m}}{n!}\end{aligned}\tag{6-3-13}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}\zeta^{l-m}}(\zeta^2-1)^l&=\sum_{n=0}^{l-m}C_{l-m}^{n}\frac{\mathrm{d}^n(\zeta-1)^l}{\mathrm{d}\zeta^n}\frac{\mathrm{d}^{l-m-n}(\zeta+1)^l}{\mathrm{d}\zeta^{l-m-n}}\\&=\sum_{n=0}^{l-m}C_{l-m}^{n}\frac{l!(\zeta-1)^{l-n}}{(l-n)!}\frac{l!(\zeta+1)^{n+m}}{(n+m)!}\end{aligned}\tag{6-3-14}$$

因为

$$C_{l+m}^{n+m}\frac{1}{(l-n-m)!\ n!}=\frac{(l+m)!}{(n+m)!\ (l-n)!\ (l-n-m)!\ n!}$$

$$C_{l-m}^{n}\frac{1}{(l-n)!\ (n+m)!}=\frac{(l-m)!}{n!\ (l-m-n)!\ (l-n)!\ (n+m)!}$$

比较两式，可见有

$$C_{l+m}^{n+m}\frac{1}{(l-n-m)!\ n!}=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}C_{l-m}^{n}\frac{1}{(l-n)!\ (n+m)!}$$

于是式(6-3-13)可以写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l&=(\zeta^2-1)^{-m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\sum_{n=0}^{l-m}C_{l-m}^{n}\frac{l!(\zeta-1)^{l-n}}{(l-n)!}\frac{l!(\zeta+1)^{n+m}}{(n+m)!}\\&=(-)^m(1-\zeta^2)^{-m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}\zeta^{l-m}}(\zeta^2-1)^l\end{aligned}$$

或

$$\frac{(l-m)!}{(l+m)!}(1-\zeta^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l=(-)^m(1-\zeta^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}\zeta^{l-m}}(\zeta^2-1)^l$$

两边同除以 $2^l l!$，则根据式(6-3-9)和式(6-3-10)，上式即

$$\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\zeta)=(-)^m\mathrm{P}_l^{-m}(\zeta)$$

这就证明了公式(6-3-11)。

6.4 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 多项式的生成函数和递推公式

6.4.1 生成函数

许多特殊函数都有各自的生成函数 (generation function)，又称母函数。生成函数在对特殊函数的分析中有重要的应用。

若函数 $f(x,s)$ 的级数表达式为

$$f(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s)x^n \tag{6-4-1}$$

而 $a_n(s)$ 恰好是某特殊函数 $G_n(s)$，则称 $f(x,s)$ 是 $G_n(s)$ 的生成函数。

现在导出 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的生成函数。设在 z 轴上距原点为 1 处有一个点电荷，其电量为 $q=4\pi\varepsilon_0$，如图 6-4-1 所示。则在以原点为球心，半径为 1 的球面内的某点，此电荷产生的电势为

$$\psi(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} \tag{6-4-2}$$

图 6-4-1　点电荷与球面

另一方面，因电势满足 $\nabla^2\psi=0$ (q 所在点除外)，且 ψ 与角度 φ 无关，即为轴对称，这相当于 6.1.1 节中 $k=0$，$m=0$ 的情况，故方程有一系列解：$\psi_l(r,\zeta)=R_l(r)\mathrm{P}_l(\zeta)$，其中 $\zeta=\cos\theta$。这里 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 为勒让德多项式，它满足在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 内处处有限的要求。$R_l(r)$ 满足式(6-1-5)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_l}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R_l=0 \tag{6-4-3}$$

此称 Euler 方程。该方程的通解为

$$R_l(r)=C_lr^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}} \tag{6-4-4}$$

但因原点无电荷，$R_l(0)$ 应有限，故知 $D_l=0$。于是有 $\psi_l(r,\zeta)=C_lr^l\mathrm{P}_l(\zeta)$。由此，方程 $\nabla^2\psi=0$ 在原点有限的轴对称解可写为

$$\psi(r,\zeta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^l\mathrm{P}_l(\zeta) \tag{6-4-5}$$

比较式(6-4-2)和式(6-4-5)，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\zeta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^l\mathrm{P}_l(\zeta) \tag{6-4-6}$$

为确定 C_l，考虑 $\zeta=1$ (即 $\theta=0$)时的情况。利用 $\mathrm{P}_l(1)\equiv1$，此时式(6-4-6)成为

$$\frac{1}{1-r}=\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^l\quad(r<1)$$

与公式

$$\frac{1}{1-r}=\sum_{l=0}^{\infty}r^l\quad(r<1)$$

相比较，可知 $C_l=1$ ($l=0,1,2,\cdots$)。于是式(6-4-6)成为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\zeta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\zeta)r^l \tag{6-4-7}$$

按定义，$f(r,\zeta)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2r\zeta+r^2}}$ 即为 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的生成函数。

6.4.2　$\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的递推关系

利用生成函数可导出递推关系(recurrence relations)。

① 函数间的递推关系

将式(6-4-7)两边对 r 求导数,可得

$$\frac{\zeta - r}{\sqrt{1-2r\zeta+r^2}} = (1-2r\zeta+r^2)\sum_{l=1}^{\infty} l\mathrm{P}_l(\zeta)r^{l-1} \tag{6-4-8}$$

用式(6-4-7)改写上式左边,并对右边做变换 $l-1\to l$,可得〔为简洁,以下函数 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 中的自变量被隐藏不写〕

$$(\zeta - r)\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l\, r^l = (1-2r\zeta+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\mathrm{P}_{l+1}r^l \tag{6-4-9}$$

比较式(6-4-9)两边 r 的同次项系数,有

r^0:
$$\zeta\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_1 \tag{6-4-10}$$

r^l:
$$\zeta\mathrm{P}_l - \mathrm{P}_{l-1} = (l+1)\mathrm{P}_{l+1} - 2l\zeta\mathrm{P}_l + (l-1)\mathrm{P}_{l-1}$$

即

$$(l+1)\mathrm{P}_{l+1} - (2l+1)\zeta\mathrm{P}_l + l\mathrm{P}_{l-1} = 0 \quad (l\geqslant 1) \tag{6-4-11}$$

式(6-4-10)和式(6-4-11)给出了不同 l 的函数间的递推关系。

② 涉及导数的递推关系

此类关系中,常用的有以下几个:

$$\mathrm{P}'_{l+1} - \zeta\mathrm{P}'_l = (l+1)\mathrm{P}_l \tag{6-4-12}$$

$$\zeta\mathrm{P}'_l - \mathrm{P}'_{l-1} = l\mathrm{P}_l \tag{6-4-13}$$

$$(\zeta^2-1)\mathrm{P}'_l = l[\zeta\mathrm{P}_l - \mathrm{P}_{l-1}] \tag{6-4-14}$$

证 首先,将式(6-4-7)对 ζ 求导,可得

$$r(1-2r\zeta+r^2)^{-3/2} = \sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}'_l(\zeta)r^l$$

再利用式(6-4-7),将上式写为

$$r\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l r^l = (1-2r\zeta+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}'_l r^l \tag{6-4-15}$$

比较式(6-4-15)两边 r^{l+1} 项的系数,可得

$$\mathrm{P}_l = \mathrm{P}'_{l+1} - 2\zeta\mathrm{P}'_l + \mathrm{P}'_{l-1} \tag{6-4-16}$$

另一方面,对式(6-4-11)求导,又得

$$(l+1)\mathrm{P}'_{l+1} - (2l+1)\mathrm{P}_l - (2l+1)\zeta\mathrm{P}'_l + l\mathrm{P}'_{l-1} = 0 \tag{6-4-17}$$

由式(6-4-16)和式(6-4-17)消去 P'_{l-1},即得式(6-4-12);消去 P'_{l+1},则得式(6-4-13)。

在式(6-4-12)中作变换 $l\to l-1$,有

$$\mathrm{P}'_l - \zeta\mathrm{P}'_{l-1} = l\mathrm{P}_{l-1}$$

再利用式(6-4-13)消去 P'_{l-1},即得式(6-4-14)。

证完。

如果分别对式(6-4-12)和式(6-4-13)求 $m-1$ 阶导数,并利用式(6-1-13),则又可依次得到下面两个关于高阶导数的公式:

$$\mathrm{P}_{l+1}^{(m)} = \zeta\mathrm{P}_l^{(m)} + (l+m)\mathrm{P}_l^{(m-1)} \tag{6-4-18}$$

$$\mathrm{P}_{l-1}^{(m)} = \zeta\mathrm{P}_l^{(m)} - (l-m+1)\mathrm{P}_l^{(m-1)} \tag{6-4-19}$$

这些关系式在推导 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 的递推公式时很有用处。

6.4.3 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 的递推公式

这方面的常用公式有以下几个：

$$\mathrm{P}_{l+1}^m=\zeta\mathrm{P}_l^m+(l+m)(1-\zeta^2)^{1/2}\mathrm{P}_l^{m-1} \tag{6-4-20}$$

$$\mathrm{P}_{l-1}^m=\zeta\mathrm{P}_l^m-(l-m+1)(1-\zeta^2)^{1/2}\mathrm{P}_l^{m-1} \tag{6-4-21}$$

$$(2l+1)\zeta\mathrm{P}_l^m=(l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}^m+(l+m)\mathrm{P}_{l-1}^m \tag{6-4-22}$$

$$(1-\zeta^2)^{1/2}\mathrm{P}_l^{m+1}=(l+m+1)\zeta\mathrm{P}_l^m-(l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}^m \tag{6-4-23}$$

$$\begin{aligned}(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{P}_l^m&=(l+1)\zeta\mathrm{P}_l^m-(l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}^m\\&=(l+m)\mathrm{P}_{l-1}^m-l\zeta\mathrm{P}_l^m\end{aligned} \tag{6-4-24}$$

前三式很易证明：

把 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 的关系式(6-1-17)用于式(6-4-18)，可得式(6-4-20)；用于式(6-4-19)，又可得式(6-4-21)。

由式(6-4-18)和(6-4-19)消去 $\mathrm{P}_l^{(m-1)}$ 项，得到

$$(2l+1)\zeta\mathrm{P}_l^{(m)}=(l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}+(l+m)\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}$$

再利用式(6-1-17)，即得式(6-4-22)。

下面证明式(6-4-23)和式(6-4-24)：

在式(6-4-21)中改 m 为 $m+1$，改 l 为 $l+1$，则有

$$\mathrm{P}_l^{m+1}=\zeta\mathrm{P}_{l+1}^{m+1}-(l-m+1)(1-\zeta^2)^{1/2}\mathrm{P}_{l+1}^m$$

在式(6-4-20)中改 m 为 $m+1$，有

$$\mathrm{P}_{l+1}^{m+1}=\zeta\mathrm{P}_l^{m+1}+(l+m+1)(1-\zeta^2)^{1/2}\mathrm{P}_l^m$$

由以上两式消去 P_{l+1}^{m+1}，即可得到式(6-4-23)。

为证明式(6-4-24)，利用式(6-1-17)，可写出

$$\begin{aligned}(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{P}_l^m&=(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}\right]\\&=(1-\zeta^2)\left[-\frac{m\zeta}{1-\zeta^2}+\frac{\mathrm{P}_l^{(m+1)}(\zeta)}{\mathrm{P}_l^{(m)}(\zeta)}\right]\mathrm{P}_l^m(\zeta)\end{aligned}$$

又由式(6-1-17)，有

$$\frac{\mathrm{P}_l^{(m+1)}(\zeta)}{\mathrm{P}_l^{(m)}(\zeta)}=(1-\zeta^2)^{-1/2}\frac{\mathrm{P}_l^{m+1}(\zeta)}{\mathrm{P}_l^m(\zeta)}$$

代入上式，得

$$(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{P}_l^m=-m\zeta\mathrm{P}_l^m+(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}_l^{m+1}$$

以式(6-4-23)替换右边第二项，即得式(6-4-24)的第一种形式。再利用式(6-4-22)，则式(6-4-24)右边成为第二种形式。

应当指出，以上关于 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 的公式是在费瑞尔定义式(6-1-17)的前提下得到的。有些文献采用霍布森定义〔比定义式(6-1-17)多一因子 $(-)^m$〕，导出的公式与本书有所不同，应用时需注意区别。

6.5 正交关系

本节所讨论的 $P_l(\zeta)$ 和 $P_l^m(\zeta)$ 皆指多项式。

6.5.1 正交关系式

对于 $P_l^m(\zeta)$，有以下重要的积分关系式：

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(\zeta)P_l^{m'}(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}=\frac{(l+m)!}{m(l-m)!}\delta_{mm'}\quad(m\neq 0)\tag{6-5-1}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(\zeta)P_{l'}^m(\zeta)d\zeta=\frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{ll'}\tag{6-5-2}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(\zeta)P_l^{-m'}(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}=\frac{(-)^m}{m}\delta_{mm'}\quad(m\neq 0)\tag{6-5-3}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(\zeta)P_{l'}^{-m}(\zeta)d\zeta=(-)^m\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}\tag{6-5-4}$$

对于 $P_l(\zeta)$，则有

$$\int_{-1}^{1} P_l(\zeta)P_{l'}(\zeta)d\zeta=\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}\tag{6-5-5}$$

上述积分为 0 时，称积分中的两勒让德多项式正交或带权正交，故这些积分又被称为正交关系。

因为式(6-5-3)和式(6-5-4)可利用式(6-3-11)分别由式(6-5-1)和式(6-5-2)得到，而式(6-5-5)则是式(6-5-2)在 $m=0$ 时的特例，故只需证明式(6-5-1)和式(6-5-2)。下面首先证明其正交性，然后导出非正交时的积分结果。

6.5.2 正交性的证明

连带的勒让德方程(6-1-9)可写为

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{dP_l^m}{d\zeta}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]P_l^m=0\tag{6-5-6}$$

两边同乘 $P_{l'}^{m'}$，得

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{dP_l^m}{d\zeta}\right]P_{l'}^{m'}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]P_l^mP_{l'}^{m'}=0\tag{6-5-7}$$

交换 l、l' 和 m、m'，所得式子与式(6-5-7)相减，可得

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\left(\frac{dP_l^m}{d\zeta}P_{l'}^{m'}-\frac{dP_{l'}^{m'}}{d\zeta}P_l^m\right)\right]+\left[l(l+1)-l'(l'+1)-\frac{m^2-m'^2}{1-\zeta^2}\right]P_l^mP_{l'}^{m'}=0\tag{6-5-8}$$

将上式对 ζ 在 $[-1,1]$ 区间内取定积分，则左边第一项因有因子 $(1-\zeta^2)$ 而为 0，于是有

$$[l(l+1)-l'(l'+1)]\int_{-1}^{1} P_l^mP_{l'}^{m'}d\zeta=(m^2-m'^2)\int_{-1}^{1}\frac{P_l^mP_{l'}^{m'}}{1-\zeta^2}d\zeta\tag{6-5-9}$$

由此可知，对于 $m=m'$，若 $l\neq l'$，则必有

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m \mathrm{P}_{l'}^m \mathrm{d}\zeta = 0 \tag{6-5-10}$$

对于 $l=l'$，若 $m\neq m'$，则必有

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}_l^m \mathrm{P}_l^{m'}}{1-\zeta^2} \mathrm{d}\zeta = 0 \tag{6-5-11}$$

至此，正交性得证。

6.5.3 非正交时的积分

先考虑 $\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta$。对递推公式(6-4-22)乘以 P_{l-1}^m，并在 $[-1,1]$ 区间内取定积分，再利用正交关系式(6-5-10)，可得

$$(l+m)\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_{l-1}^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta = (2l+1)\int_{-1}^{1} \zeta \mathrm{P}_l^m \mathrm{P}_{l-1}^m \mathrm{d}\zeta \tag{6-5-12}$$

对式(6-4-22)乘以 P_{l+1}^m，则与上面相同，可得

$$(l-m+1)\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_{l+1}^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta = (2l+1)\int_{-1}^{1} \zeta \mathrm{P}_l^m \mathrm{P}_{l+1}^m \mathrm{d}\zeta \tag{6-5-13}$$

把式(6-5-13)中的 l 换为 $l-1$，得

$$(l-m)\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta = (2l-1)\int_{-1}^{1} \zeta \mathrm{P}_{l-1}^m \mathrm{P}_l^m \mathrm{d}\zeta \tag{6-5-14}$$

比较式(6-5-12)和式(6-5-14)，可得下面的递推关系：

$$\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta = \frac{(2l-1)(l+m)}{(2l+1)(l-m)}\int_{-1}^{1} (\mathrm{P}_{l-1}^m)^2 \mathrm{d}\zeta \tag{6-5-15}$$

由此又有

$$\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_{l-1}^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta = \frac{[2(l-1)-1](l-1+m)}{[2(l-1)+1](l-1-m)}\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_{l-1}^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta \tag{6-5-16}$$

以此类推。注意到 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 是 ζ 的 l 次多项式，$\mathrm{P}_l^{(l)}(\zeta)=$常数，$\mathrm{P}_l^{(l+1)}(\zeta)=0$，故由式(6-1-17)可知，在 P_l^m 中，$m\leqslant l$，故递推的终点是右边积分为 $\int_{-1}^{1} (\mathrm{P}_m^m)^2 \mathrm{d}\zeta$。按式(6-5-15)即有

$$\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_{m+1}^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta = \frac{(2m+1)(2m+1)}{(2m+3)\cdot 1}\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_m^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta \tag{6-5-17}$$

综合以上，可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta &= \frac{(2l-1)(l+m)\cdot(2l-3)(l+m-1)\cdot(2m+1)(2m+1)}{(2l+1)(l-m)\cdot(2l-1)(l-m-1)\cdot(2m+3)\cdot 1}\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_m^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{(l+m)!(2m+1)}{(2l+1)(2m)!(l-m)!}\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_m^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{6-5-18}$$

现在考虑积分 $\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_m^m(\zeta)]^2 \mathrm{d}\zeta$。在式(6-1-17)中令 $l=m$，有

$$\mathrm{P}_m^m(\zeta) = (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \mathrm{P}_m^{(m)}(\zeta) \tag{6-5-19}$$

由于 $\mathrm{P}_m(\zeta)$ 最高次项为 $\dfrac{(2m)!}{2^m\ (m!)^2}\zeta^m$〔见式(6-3-5)〕，故

$$\mathrm{P}_m^{(m)}(\zeta) = \frac{(2m)!\ m!}{2^m\ (m!)^2} = \frac{(2m)!}{(2m)!!} = (2m-1)!! \tag{6-5-20}$$

于是式(6-5-19)成为

$$P_m^m(\zeta)=(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}(2m-1)!! \tag{6-5-21}$$

从而

$$\int_{-1}^{1}[P_m^m(\zeta)]^2 d\zeta=[(2m-1)!!]^2\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)^m d\zeta \tag{6-5-22}$$

应用积分公式(证明见本章附录)

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m dx=2\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \tag{6-5-23}$$

得

$$\int_{-1}^{1}(P_m^m)^2 d\zeta=\frac{[(2m-1)!!]^2\cdot 2\cdot(2m)!!}{(2m+1)!!}=\frac{2\cdot(2m)!}{2m+1} \tag{6-5-24}$$

代入式(6-5-18)的右边,得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}[P_l^m(\zeta)]^2 d\zeta&=\frac{(l+m)!(2m+1)}{(2l+1)(2m)!(l-m)!}\frac{2\cdot(2m)!}{2m+1}\\&=\frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\end{aligned}$$

这就是式(6-5-2)在 $l=l'$ 时的结果。

顺便指出,$\|P_l^m\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}[P_l^m(\zeta)]^2 d\zeta}$ 称为 $P_l^m(\zeta)$ 的模。由上式可知,

$$\|P_l^m\|=\sqrt{\frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}} \tag{6-5-25}$$

下面考虑 $\int_{-1}^{1}[P_l^m(\zeta)]^2\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}$。根据式(6-4-24)的两种形式,有

$$\frac{d}{d\zeta}P_l^m=\frac{(l+m)P_{l-1}^m-l\zeta P_l^m}{1-\zeta^2} \tag{6-5-26}$$

和

$$\frac{d}{d\zeta}P_{l-1}^m=\frac{l\zeta P_{l-1}^m-(l-m)P_l^m}{1-\zeta^2} \tag{6-5-27}$$

以 P_{l-1}^m 乘式(6-5-26),以 P_l^m 乘式(6-5-27),所得两式相加并积分,得

$$(l+m)\int_{-1}^{1}[P_{l-1}^m(\zeta)]^2\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}-(l-m)\int_{-1}^{1}[P_l^m(\zeta)]^2\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}=\int_{-1}^{1}\frac{d}{d\zeta}(P_l^m P_{l-1}^m)d\zeta$$

由式(6-1-17)知,对 $m\neq 0$,有 $P_l^m(\pm 1)=0$,故上式右边为 0,于是有

$$\int_{-1}^{1}[P_l^m(\zeta)]^2\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}=\frac{l+m}{l-m}\int_{-1}^{1}[P_{l-1}^m(\zeta)]^2\frac{d\zeta}{1-\zeta^2} \tag{6-5-28}$$

易于看出,这是一个递推关系,递推的终点是

$$右边=\frac{m+1+m}{m+1-m}\int_{-1}^{1}[P_m^m(\zeta)]^2\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}$$

故有

$$\int_{-1}^{1}[P_l^m(\zeta)]^2\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}=\frac{l+m}{l-m}\cdot\frac{l+m-1}{l-m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2m+1}{1}\int_{-1}^{1}[P_m^m(\zeta)]^2\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}$$

利用式(6-5-21),上式成为

$$\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2\frac{\mathrm{d}\zeta}{1-\zeta^2}=\frac{(l+m)![(2m-1)!!]^2}{(2m)!(l-m)!}\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)^{m-1}\mathrm{d}\zeta$$

再利用公式(6-5-23),即得

$$\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2\frac{\mathrm{d}\zeta}{1-\zeta^2}=\frac{(l+m)![(2m-1)!!]^2}{(2m)!(l-m)!}\frac{2(2m-2)!!}{(2m-1)!!}$$

$$=\frac{2(l+m)!}{(l-m)!}\frac{(2m-1)!}{(2m)!}=\frac{(l+m)!}{(l-m)!\ m}$$

此即式(6-5-1)在 $m=m'$ 时的结果。

6.5.4 函数 $f(\zeta)$ 按 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 和 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 的展开式

前面式(6-5-6)已表明,勒让德方程属于斯特姆-刘维尔型方程。另一方面,作为方程的解,多项式 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 又满足在 $\zeta=\pm1$ 处有限这一边界条件,因此它是本征函数。由式(6-5-6)可以知道,$\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的本征值是 $l(l+1)$,权函数是 1。式(6-5-5)实际上已给出了 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的正交归一关系。

按斯特姆-刘维尔型本征值问题的理论,属于不同 l 的多项式 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的全体构成完备的本征函数组 $\{\mathrm{P}_l(x)\}$。因此,所有定义在 $[-1,1]$ 上,并且在 $\zeta=\pm1$ 处有限的连续函数 $f(\zeta)$ 可以展开为 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 的级数:

$$f(\zeta)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\mathrm{P}_l(\zeta) \tag{6-5-29}$$

利用正交关系式(6-5-5),可得式(6-5-29)中的展开系数:

$$a_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(\zeta)\mathrm{P}_l(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{6-5-30}$$

连带的勒让德多项式 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 满足 $\zeta=\pm1$ 处为 0 的边界条件,因此它也是本征函数。对于一定的 m,全体属于不同 l 的多项式 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 构成完备的本征函数组 $\{\mathrm{P}_l^m(\zeta)\}$,其中 m 为任意整数,$l\geqslant m$。因此,所有定义在 $[-1,1]$ 上,并且在 $\zeta=\pm1$ 处为 0 的连续函数 $f(\zeta)$ 可以展开为 $\mathrm{P}_l^m(\zeta)$ 的级数:

$$f(\zeta)=\sum_{l=0}^{\infty}b_l\mathrm{P}_l^m(\zeta) \tag{6-5-31}$$

利用正交关系式(6-5-2),可得上式中的展开系数

$$b_l=\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}\int_{-1}^{1}f(\zeta)\mathrm{P}_l^m(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{6-5-32}$$

6.5.5 平面波用勒让德多项式展开

沿 z 轴传播的平面波可表示为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$,这里 k 为角波数,r 为场点到原点的距离,θ 为矢径 $\boldsymbol{r}$ 与 z 轴之间的夹角。令 $\zeta=\cos\theta$,则可记

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\zeta}=f(\zeta)$$

显然在 $\zeta=\pm1$ 处 $f(\zeta)$ 有限,故可将其按 $\mathrm{P}_l(\zeta)$ 展开。

把上述 $f(\zeta)$ 代入展开公式(6-5-29),有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\zeta}=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\mathrm{P}_l(\zeta) \tag{6-5-33}$$

其中

$$a_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\zeta}\mathrm{P}_l(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{6-5-34}$$

用罗巨格公式(6-3-7)表示积分中的 $\mathrm{P}_l(\zeta)$，则有

$$a_l=\frac{2l+1}{2}\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\zeta}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\zeta^l}[(\zeta^2-1)^l]\mathrm{d}\zeta$$

分部积分 l 次，注意到 $m<l$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\zeta^m}[(\zeta^2-1)^l]=\sum_{n=1}^{m}F_n(\zeta)(\zeta^2-1)^{l-n}$$

它在 $\zeta=\pm1$ 处为 0〔$F_n(\zeta)$ 是 ζ 的幂函数〕，故可得到

$$\begin{aligned}a_l&=\frac{2l+1}{2^{l+1}l!}(-\mathrm{i}kr)^l\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\zeta}(\zeta^2-1)^l\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{2l+1}{2^{l+1}l!}(-\mathrm{i}kr)^l\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^n}{n!}\zeta^n(\zeta^2-1)^l\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

将式中的求和与积分交换顺序，注意到 n 为奇数的项积分为 0，则可写出

$$a_l=\frac{2l+1}{2^l l!}(-)^l\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{2s+l}}{(2s)!}\int_0^1\zeta^{2s}(\zeta^2-1)^l\mathrm{d}\zeta \tag{6-5-35}$$

令 $\zeta^2=u$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^1\zeta^{2s}(\zeta^2-1)^l\mathrm{d}\zeta&=\int_0^1 u^s(u-1)^l\frac{\mathrm{d}u}{2u^{1/2}}\\&=\frac{(-)^l}{2}\int_0^1 u^{s-\frac{1}{2}}(1-u)^l\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{6-5-36}$$

利用公式

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\mathrm{d}u=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{6-5-37}$$

可知

$$\int_0^1 u^{s-\frac{1}{2}}(1-u)^l\mathrm{d}u=\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(s+l+1+\frac{1}{2}\right)} \tag{6-5-38}$$

再利用

$$\Gamma(l+1)=l!,\ \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2s)!}{2^{2s}s!}\sqrt{\pi}$$

综合可得

$$\begin{aligned}a_l&=(2l+1)\mathrm{i}^l\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-)^s}{s!\Gamma\left(s+1+l+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{2s+l+\frac{1}{2}}\\&=(2l+1)\mathrm{i}^l\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(kr)=(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)\end{aligned} \tag{6-5-39}$$

其中 $\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ 和 $\mathrm{j}_l(kr)$ 分别为 $\nu=l+\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔函数和 l 阶球贝塞尔函数(详见第 8 章)：

$$\mathrm{J}_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\mathrm{j}_l(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\ \mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(\zeta)$$

把 a_l 代入式(6-5-33)，即得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{i}^l(2l+1)\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{6-5-40}$$

6.6 球谐函数

6.6.1 球谐函数及其正交归一关系

现在先回到 6.1 节的开头部分。因为方程(6-1-6)和方程(6-1-7)的解分别为

$$\Theta(\theta)=\mathrm{P}_l^{\pm m}(\cos\theta),\quad \Phi(\varphi)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi}$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,l$，故若引入函数

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=C_{lm}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{6-6-1}$$

其中 $l=0,1,2,\cdots$，$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$，$C_{lm}$ 为常数，则式(6-1-4)成为

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

同时方程(6-1-6)和方程(6-1-7)可合并为

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\right]Y_{lm}(\theta,\varphi)=0 \tag{6-6-2}$$

显然 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 满足单值(围绕 z 轴)、有限(对 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$)的自然边界条件，可见 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 是亥姆霍兹方程和拉普拉斯方程关于角度 (θ,φ) 的本征函数，本征值为 $l(l+1)$。

令 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 满足以下归一化条件：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 1 \tag{6-6-3}$$

因为

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2\pi C_{lm}^2\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2\mathrm{d}\zeta$$

故由式(6-5-10)可得

$$C_{lm}=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}$$

于是有

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{6-6-4}$$

$Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 称为 l 次球谐函数。

特别地，对 $l=0$，m 只能取 0。因为 $\mathrm{P}_0^0=P_0\equiv1$，故

$$Y_{00}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{6-6-5}$$

利用正交关系式(6-5-2)，并注意到

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{mm'} \tag{6-6-6}$$

则可知 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 满足正交归一关系：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{6-6-7}$$

式中 * 号表示复数共轭。因此，全体 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ $(l=0,1,2,\cdots, m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l)$ 构成正交归一的本征函数组 $\{Y_{lm}(\theta,\varphi)\}$。

这样，一个在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ 上单值有限的函数 $F(\theta,\varphi)$ 就可以展开为 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 的二重广义 Fourier 级数：

$$F(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{6-6-8}$$

其中

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \tag{6-6-9}$$

6.6.2 球坐标系中拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的一般解

在球坐标系中，拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的一般解可写为径向方程的解与球谐函数乘积的级数。下面分别介绍。

对拉普拉斯方程，径向方程(6-1-5)中 $k=0$，两个线性无关解为

$$R_l(r)=r^l \text{和} \frac{1}{r^{l+1}} \tag{6-6-10}$$

于是拉普拉斯方程的一般解可写为

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)})Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{6-6-11}$$

A_{lm} 和 B_{lm} 为待定系数。

对亥姆霍兹方程，径向方程(6-1-5)可化为球贝塞尔方程(见 8.1 节)，故方程的解为球贝塞尔函数 $\mathrm{j}_l(kr)$ 和 $\mathrm{n}_l(kr)$ $(l=0,1,2,\cdots)$。因此亥姆霍兹方程的一般解为

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[A_{lm}\mathrm{j}_l(kr) + B_{lm}\mathrm{n}_l(kr)]Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{6-6-12}$$

式(6-6-11)和式(6-6-12)中的各待定系数可由关于 r 的边界条件确定。

附录　公式(6-5-23)的证明

令 $x=\cos\theta$，则

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^m dx = 2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2m+1}d\theta$$

因为

$$\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2m+1}d\theta = -\cos\theta(\sin\theta)^{2m}\Big|_0^{\pi/2} + 2m\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta(\sin\theta)^{2m-1}d\theta$$
$$= 2m\int_0^{\pi/2}[(\sin\theta)^{2m-1}-(\sin\theta)^{2m+1}]d\theta$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2m+1}\mathrm{d}\theta &= \frac{2m}{2m+1}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2m-1}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2m-3}\mathrm{d}\theta\\ &= \cdots\cdots\\ &= \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\end{aligned}$$

于是

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\mathrm{d}x = 2\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

式(6-5-23)得证。

习　题　6

6.1　利用P符号的变换,求连带的勒让德方程在 $z_r=-1$ 邻域内的正则解。

6.2　证明罗巨格公式(6-3-7)。

6.3　证明以下公式(其中 θ 为矢径 $\boldsymbol{r}$ 与 z 轴间的夹角):

(1) $\mathrm{P}_n(\cos\theta)=\dfrac{(-)^n}{n!}r^{n+1}\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\dfrac{1}{r}\right)$

(2) $\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)=(-)^n\dfrac{(2m)!}{2^m m!}\dfrac{\sin^m\theta}{(n-m)!}r^{n+m+1}\dfrac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\dfrac{1}{r^{2m+1}}\right)$

6.4　把 $|x|$ 在 $[-1,1]$ 上展开为 $\mathrm{P}_l(x)$ 的级数。

6.5　把 x^3 在 $[-1,1]$ 上展开为 $\mathrm{P}_l(x)$ 的级数。

6.6　计算积分 $I=\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)[\mathrm{P}_l'(\zeta)]^2\mathrm{d}\zeta$。

第7章　合流超几何微分方程

合流超几何微分方程在应用中具有非常重要的地位，电磁场问题中许多微分方程的解都可以通过合流超几何方程的解得出。本节将介绍合流超几何方程及其解的基本性质。在后面的几节中，将简要讨论一些与之有关联的方程，即拉盖尔方程、厄米特方程、以及惠泰克方程等。贝塞尔方程也与合流超几何方程有关，但因关于它的内容较多，在第8章将专门加以讨论。

7.1　合流超几何微分方程

7.1.1　合流超几何方程的基本形式

在超几何微分方程

$$\zeta(1-\zeta)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\zeta]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}-\alpha\beta u=0$$

中，作变换 $\zeta=\dfrac{z}{\beta}$，可将方程化为

$$z\left(1-\frac{z}{\beta}\right)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\left[\gamma-(\frac{\alpha+1}{\beta}+1)z\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}-\alpha u=0$$

再令 $\beta\to\infty$，得

$$z\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+(\gamma-z)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}-\alpha u=0 \tag{7-1-1}$$

以上所作的变换称为库末(Kummer)变换，方程(7-7-1)称为库末方程。

超几何微分方程的奇点是$(0,1,\infty)$。在库末变换中，这些奇点也随之变换，过程如下：

$$\zeta=(0,1,\infty)\xrightarrow{z=\beta\zeta}z=(0,\beta,\infty)\xrightarrow{\beta\to\infty}(0,\infty)$$

可见原方程的3个奇点汇合为新方程的两个奇点(实为 β 和 ∞ 汇合为一个)，故又称方程(7-1-1)为合流超几何方程(Confluent hypergeometric equation)。

7.1.2　$z=0$ 邻域的正则解　　合流超几何函数

易于看出，$z=0$ 是库末方程(7-1-1)的正则奇点。根据求正则解的方法可以求得，在

$z=0$ 邻域有以下两个正则解：

$$\rho=0: \qquad u_1=F(\alpha;\gamma;z) \tag{7-1-2}$$

$$\rho=1-\gamma: \qquad u_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z) \tag{7-1-3}$$

其中

$$F(\alpha;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n \tag{7-1-4}$$

称为合流超几何函数，又称库末函数。在式(7-1-3)中已假定 $\gamma\neq0,-1,-2,\cdots$。

其实，既然合流超几何方程是由超几何方程经库末变换得来的，那么，前者的解应当可由后者的正则解经同样变换得到。超几何方程在 $z=0$ 邻域内指标 $\rho=0$ 的正则解为

$$\begin{aligned}u_1=F(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)}{n!(\gamma)_n}\zeta^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{\beta}\right)}{n!(\gamma)_n}(\beta\zeta)^n\end{aligned}$$

令 $\beta\to\infty$，$z=\beta\zeta$，上式即为

$$u_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n=F(\alpha;\gamma;z)$$

这就是式(7-1-2)。

超几何方程对应于 $\rho=1-\gamma$ ($\gamma\neq0,-1,-2,\cdots$)的解为

$$u_2(\zeta)=\zeta^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,1-\gamma+\beta;2-\gamma;\zeta)$$

与上面做法相仿，可以得到合流超几何方程的正则解式(7-1-3)，推导过程不重复。

由式(7-1-4)可以看出，$e^x=F(1,1,x)$。另外还有一些函数也可以表示为合流超几何函数，例如

$$\frac{e^x}{x}\operatorname{sh}x=F(1;2;2x)$$

不难证明，库末函数满足如下求导公式：

$$\frac{d^m}{dz^m}F(\alpha;\gamma;z)=\frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m}F(\alpha+m;\gamma+m;z) \tag{7-1-5}$$

此外还有紧邻函数间的递推公式：

$$(\gamma-1)F(\gamma-1)-\alpha F(\alpha+1)-(\gamma-\alpha-1)F=0 \tag{7-1-6}$$

$$\gamma F-zF(\gamma+1)-\gamma F(\alpha-1)=0 \tag{7-1-7}$$

这里 $F\equiv F(\alpha;\gamma;z)$，$F(\alpha\pm1)\equiv F(\alpha\pm1;\gamma;z)$，$F(\gamma\pm1)\equiv F(\alpha;\gamma\pm1;z)$。比较此二式与超几何函数的公式(5-1-25)和公式(5-1-26)，可知式(7-1-6)与式(5-1-25)相同，但式(7-1-7)与式(5-1-26)则有所不同。

下面给出的第一库末公式是常用的：

$$F(\alpha;\gamma;z)=e^zF(\gamma-\alpha;\gamma;-z) \tag{7-1-8}$$

该式的证明如下。

首先写出

$$e^{-z}F(\alpha;\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^{k+n}$$

令 $l=k+n$，则显然 $l=0,1,2,\cdots,\infty$。但对一定的 l 而言，n 只能取从 0 (对应于 $k=l$)到 l

（对应于 $k=0$）的各个值，故上式可写为

$$\mathrm{e}^{-z}\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z)=\sum_{l=0}^{\infty}(-z)^{l}\sum_{n=0}^{l}\frac{(-)^{n}(\alpha)_{n}}{n!(l-n)!(\gamma)_{n}}$$

注意到

$$\frac{1}{n!\ (l-n)!}=\frac{l!}{l!\ n!\ (l-n)!}=\frac{1}{l!}C_{l}^{n}$$

上式即

$$\mathrm{e}^{-z}\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-z)^{l}}{l!}\sum_{n=0}^{l}(-)^{n}C_{l}^{n}\frac{(\alpha)_{n}}{(\gamma)_{n}}$$

利用公式(5-1-30)，即

$$\sum_{n=0}^{k}(-)^{n}C_{k}^{n}\frac{(\alpha)_{n}}{(\gamma)_{n}}=\frac{(\gamma-\alpha)_{k}}{(\gamma)_{k}}$$

上式成为

$$\mathrm{e}^{-z}\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha)_{l}(-z)^{l}}{l!(\gamma)_{l}}=\mathrm{F}(\gamma-\alpha;\gamma;-z)$$

证完。

图 7-1-1 给出了几个合流超几何函数的图像，曲线旁的数字注明了曲线所属的 (α,γ)。

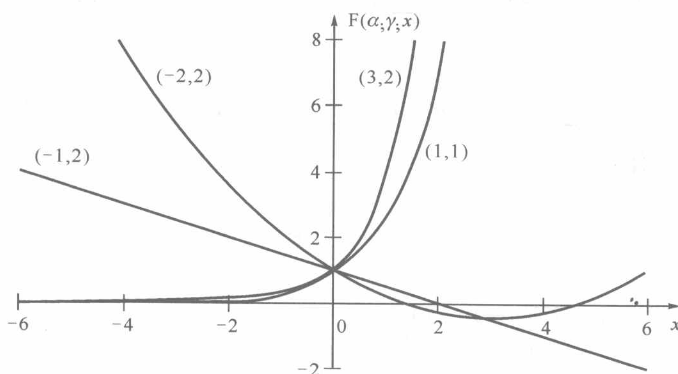


图 7-1-1　合流超几何函数的图像

7.1.3　$z=\infty$ 邻域的常规解

$z=\infty$ 是方程(7-1-1)的非正则奇点，故我们尝试找常规解。

设常规解为

$$u(z)=\mathrm{e}^{Q(z)}v(z) \tag{7-1-9}$$

其中 Q 是 z 的 $n+1$ 次函数。代入方程(7-1-1)，可得

$$\frac{\mathrm{d}^{2}v}{\mathrm{d}z^{2}}+\tilde{p}(z)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+\tilde{q}(z)v=0 \tag{7-1-10}$$

其中

$$\tilde{p}(z)=p(z)+2Q'=\overset{-1}{\frac{\gamma}{z}}-\overset{0}{1}+2\overset{n}{Q'} \tag{7-1-11}$$

$$\tilde{q}(z)=q(z)+p(z)Q'+Q''+Q'^{2}$$

$$=-\overset{-1}{\frac{\alpha}{z}}+\Big(\overset{n-1}{\frac{\gamma}{z}}-\overset{n}{1}\Big)Q'+\overset{n-1}{Q''}+\overset{2n}{Q'^2} \tag{7-1-12}$$

这里 Q' 表示 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}z$,上标注明了各项的幂次。

在常规解式(7-1-9)中,$v(z)$ 应具有正则解的形式:

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{\rho-n} \tag{7-1-13}$$

按照常规解的理论,这要求 $\tilde{p}$ 的阶必须高于 $\tilde{q}$ 的阶。由式(7-1-11)和式(7-1-12)可知 $n>0$ 不满足此要求。若 $n=0$,则只要 $\tilde{q}$ 中 0 次幂各项之和为 0 即可,故可令 $Q'(Q'-1)=0$。由此可得两个解:

解 1 $Q'=0$,于是 $Q=$常数。因为此时 $\mathrm{e}^Q=$常数,故可取 $Q=0$,从而式(7-1-9)成为 $u_3=v$。

在式(7-1-11)、式(7-1-12)中取 $Q'=0$,代入式(7-1-10),可得

$$z\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+(\gamma-z)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-\alpha v=0 \tag{7-1-14}$$

把式(7-1-13)代入方程(7-1-14),可得

$$-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\rho-n+\alpha)z^{\rho-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\rho-n)(\rho-n-1+\gamma)z^{\rho-n-1}=0$$

此即

$$-a_0(\rho+\alpha)z^{\rho}-\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(\rho-n+\alpha)-a_{n-1}(\rho-n+1)(\rho-n+\gamma)]z^{\rho-n}=0$$

比较同次幂系数,则有

$$\rho=-\alpha$$

$$a_n(-n)=a_{n-1}(-\alpha-n+1)(-\alpha-n+\gamma)$$

取 $a_0=1$,有

$$\begin{aligned}a_n&=-\frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-\gamma)}{n}a_{n-1}\\&=(-)^n\frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-\gamma)(\alpha+n-2)(\alpha+n-\gamma-1)\cdots\alpha(\alpha+1-\gamma)}{n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1}a_0\\&=(-)^n\frac{(\alpha)_n(\alpha+1-\gamma)_n}{n!}\end{aligned}$$

于是得

$$v\approx z^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\frac{(\alpha)_n(\alpha+1-\gamma)_n}{n!}z^{-n} \tag{7-1-15}$$

由递推关系可以看出,当 $n\to\infty$ 时,级数式(7-1-15)的后项与前项之比为 $|a_nz^{-n}/a_{n-1}z^{-(n-1)}|\to\left|\frac{n}{z}\right|$,故其对任何有限的 z 都不收敛。事实上,此级数只是方程的解在 $z\to\infty$ 时的渐近展开式,故式中用了 $\approx$ 号。

这样就得到了一个渐近解 u_3:

$$u_3\approx z^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\frac{(\alpha)_n(\alpha+1-\gamma)_n}{n!}z^{-n}\quad(z\to\infty) \tag{7-1-16}$$

解 2 $Q'=1$, $Q=z$,从而 $u_4=\mathrm{e}^z v$。

在式(7-1-11)和式(7-1-12)中取 $Q'=1$,代入式(7-1-10),可得

$$z\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}+(\gamma+z)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+(\gamma-\alpha)v=0 \tag{7-1-17}$$

作变换 $z\to -z$,则此式成为

$$z\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}+(\gamma-z)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-(\gamma-\alpha)v=0$$

与式(7-1-14)形式相同。因此,在式(7-1-14)的解中把 z 改为 $-z$, α 改为 $\gamma-\alpha$,即得方程(7-1-17)的解。进而可得第二个近似解:

$$u_4 \approx \mathrm{e}^z\,(-z)^{\alpha-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha)_n\,(1-\alpha)_n}{n!}z^{-n}\ (z\to\infty) \tag{7-1-18}$$

以上 u_3、u_4即在 $z=\infty$ 邻域内的常规解。因为此二解是近似的,故实际运算时一般要经过尝试,取适当多的项。

7.2 拉盖尔方程与拉盖尔多项式

7.2.1 拉盖尔方程　拉盖尔多项式

拉盖尔(Laguerre)方程的标准形式为

$$z\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}+(1+\mu-z)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+nu=0 \tag{7-2-1}$$

在用矢量场法分析抛物型渐变光纤中的电磁场时,可以遇到这个方程(参见 M. J. Adams,《An Introduction to Optical Waveguides》, John Wiley & Sons, New York, 1981, Chap. 8.1.4)。

在合流超几何方程(7-1-1)中令 $\gamma=1+\mu$, $\alpha=-n$,即可得到方程(7-2-1),故当 $n=0,1,2,\cdots$,而 μ 不是负整数时,方程(7-2-1)在 $z=0$ 邻域内有一个正则解 $\mathrm{F}(-n;\mu+1;z)$。这是一个 n 次的多项式,因为

$$(-n)_n=(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)=(-)^n n!$$

而

$$(-n)_{n+1}=(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)(-n+n)=0$$

广义的 μ 阶 n 次拉盖尔多项式定义为

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\frac{\Gamma(\mu+1+n)}{n!\ \Gamma(\mu+1)}\mathrm{F}(-n;\mu+1;z) \tag{7-2-2}$$

通常人们把它作为方程(7-2-1)在 $z=0$ 邻域内的正则解。当 $\mu=0$ 时,因为 $\Gamma(1+n)=n!$, $\Gamma(1)=1$,故式(7-2-2)成为拉盖尔多项式:

$$\mathrm{L}_n(z)=\mathrm{F}(-n;1;z) \tag{7-2-3}$$

$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)$ 和 $\mathrm{L}_n(z)$ 都是 n 次多项式,因此都有 n 个零点。此外,对所有的 n,有 $\mathrm{L}_n(0)=1$。图 7-2-1 和图7-2-2 分别给出了几个 $\mathrm{L}_n(x)$ 和 $\mathrm{L}_n^{\mu}(x)$ 的函数曲线,图 7-2-2 中的括号表示各曲线对应的 (n,μ) 值。

下面给出几个与导数有关的公式。设 m 为正整数。按式(7-2-3)有

$$\mathrm{L}_{n+m}(z)=\mathrm{F}(-n-m;1;z) \tag{7-2-4}$$

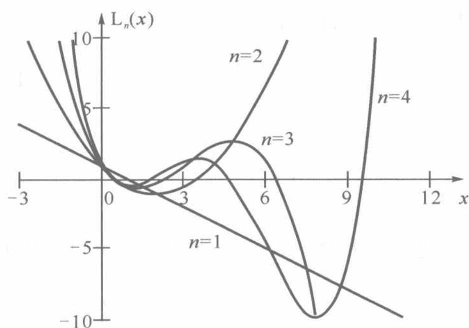


图 7-2-1　$L_n(x)$的函数曲线

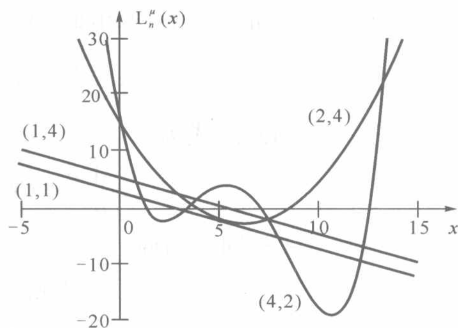


图 7-2-2　$L_n^\mu(x)$的函数曲线

利用导数公式(7-1-5)，注意到

$$(-n-m)_m=(-)^m\frac{(n+m)!}{n!}\tag{7-2-5}$$

以及 $(1)_m=m!$，不难证明下面的公式：

$$L_n^m(z)=(-)^m\frac{d^m}{dz^m}L_{m+n}(z)\tag{7-2-6}$$

类似地还可证明：

$$\frac{d^k L_n^m(z)}{dz^k}=(-)^k L_{n-k}^{m+k}(z)\quad (k\leqslant m)\tag{7-2-7}$$

证明留做习题。

另外，$L_n^\mu(z)$ 还可以写成

$$L_n^\mu(z)=\frac{e^z z^{-\mu}}{n!}\frac{d^n(e^{-z}z^{\mu+n})}{dz^n}\tag{7-2-8}$$

证明如下。

根据莱布尼兹微分公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}\tag{7-2-9}$$

有

$$\begin{aligned}\frac{d^n(e^{-z}z^{\mu+n})}{dz^n}&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-)^k e^{-z}(\mu+n)(\mu+n-1)\cdots(\mu+k+1)z^{\mu+k}\\&=e^{-z}\sum_{k=0}^{n}(-)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(\mu+n)!}{(\mu+k)!}z^{\mu+k}\\&=n!\Gamma(\mu+n+1)e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k z^{\mu+k}}{k!(n-k)!(\mu+k)!}\end{aligned}\tag{7-2-10}$$

于是

$$\frac{e^z z^{-\mu}}{n!}\frac{d^n(e^{-z}z^{\mu+n})}{dz^n}=\Gamma(\mu+n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k z^k}{k!(n-k)!(\mu+k)!}\tag{7-2-11}$$

另一方面

$$F(-n;\mu+1;z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k z^k}{k!(\mu+1)_k}$$

利用

$$(-n)_k=(-)^k\frac{n!}{(n-k)!},\qquad (\mu+1)_k=\frac{(\mu+k)!}{\Gamma(\mu+1)}$$

上式成为

$$\mathrm{F}(-n;\mu+1;z)=n!\Gamma(\mu+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k z^k}{k!(n-k)!(\mu+k)!}\tag{7-2-12}$$

于是等式(7-2-11)的右边成为 $\frac{\Gamma(\mu+1+n)}{n!\ \Gamma(\mu+1)}\mathrm{F}(-n;\mu+1;z)$。根据式(7-2-2),此即 $\mathrm{L}_n^\mu(z)$。

式(7-2-8)得证。

7.2.2 $\mathrm{L}_n^\mu(z)$ 的生成函数

$\mathrm{L}_n^\mu(z)$ 的生成函数是 $\mathrm{e}^{-\frac{zt}{1-t}}(1-t)^{-\mu-1}$,其中 $|t|<1$。也就是说,$\mathrm{L}_n^\mu(z)$ 满足下面关系:

$$\mathrm{e}^{-\frac{zt}{1-t}}(1-t)^{-\mu-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{L}_n^\mu(z)t^n\tag{7-2-13}$$

证明如下。

先将式(7-2-13)的左边表示为在 $|t|<1$ 内的泰勒级数:

$$\mathrm{e}^{-\frac{zt}{1-t}}(1-t)^{-\mu-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z)t^n$$

然后只要证明 $a_n(z)=\mathrm{L}_n^\mu(z)$ 即可。

由式(2-3-22)可知

$$a_n(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{n+1}}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\mathrm{e}^{-\frac{z\zeta}{1-\zeta}}(1-\zeta)^{-\mu-1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

其中 C 为以 $\zeta=0$ 为圆心的单位圆。

为求出上面的积分,作变量替换:

$$s=\frac{z}{1-\zeta}=\frac{z\zeta}{1-\zeta}+z$$

它把 $\zeta=0$ 变换为 $s=z$,从而 C 变为在 s 的复平面上环绕 $s=z$ 的闭曲线 C'。于是可得

$$a_n(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^z z^{-\mu}\oint_{C'}\frac{\mathrm{e}^{-s}s^{\mu+n}}{(s-z)^{n+1}}\mathrm{d}s$$

由式(2-3-18)知,上式可以写为

$$a_n(z)=\frac{\mathrm{e}^z z^{-\mu}}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^n(\mathrm{e}^{-s}s^{\mu+n})}{\mathrm{d}s^n}\right]_{s=z}=\frac{\mathrm{e}^z z^{-\mu}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n(\mathrm{e}^{-z}z^{\mu+n})}{\mathrm{d}z^n}$$

根据式(7-2-8)即有 $a_n(z)=\mathrm{L}_n^\mu(z)$。证完。

7.2.3 $\mathrm{L}_n^\mu(z)$ 的递推关系

对式(7-2-13)两边求 t 的导数,然后乘以 $(1-t)^2$,再用式(7-2-13)将左边展开。比较两边 t 的同次项系数,可得

$$(n+1)\mathrm{L}_{n+1}^\mu+(z-\mu-2n-1)\mathrm{L}_n^\mu+(\mu+n)\mathrm{L}_{n-1}^\mu=0\quad(n\geqslant1)\tag{7-2-14}$$

若对式(7-2-13)两边求 z 的导数,乘以 $(1-t)$,再用式(7-2-13)展开左边,比较同次项系数,则又得

$$\frac{\mathrm{dL}_n^\mu}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{dL}_{n-1}^\mu}{\mathrm{d}z}+\mathrm{L}_{n-1}^\mu=0 \quad (n\geqslant 1) \tag{7-2-15}$$

由式(7-2-14)和式(7-2-15)中消去 L_{n-1}^μ，得到

$$(n+1)\frac{\mathrm{dL}_{n+1}^\mu}{\mathrm{d}z}+(z-n-1)\frac{\mathrm{dL}_n^\mu}{\mathrm{d}z}-(n+1)\mathrm{L}_{n+1}^\mu+(\mu+2n+2-z)\mathrm{L}_n^\mu=0 \quad (n\geqslant 0) \tag{7-2-16}$$

在式(7-2-15)中把 n 改为 $n+1$，然后利用式(7-2-16)和式(7-2-14)消去 $\frac{\mathrm{dL}_{n+1}^\mu}{\mathrm{d}z}$ 和 L_{n+1}^μ，又得到

$$z\frac{\mathrm{dL}_n^\mu}{\mathrm{d}z}=n\mathrm{L}_n^\mu-(\mu+n)\mathrm{L}_{n-1}^\mu \quad (n\geqslant 1) \tag{7-2-17}$$

另外，在式(7-2-13)中把 μ 换为 $\mu+1$，乘以 $1-t$，然后把左边用式(7-2-13)展开。比较同次项系数，可得

$$\mathrm{L}_n^\mu(z)=\mathrm{L}_n^{\mu+1}(z)-\mathrm{L}_{n-1}^{\mu+1}(z) \tag{7-2-18}$$

式(7-2-14)～式(7-2-18)都是递推关系。

7.2.4 正交关系

首先证明一个积分公式：

$$\int_0^\infty z^\lambda \mathrm{e}^{-z}\mathrm{L}_n^\mu(z)\mathrm{L}_m^\nu(z)\mathrm{d}z=(-)^{n+m}\Gamma(\lambda+1)\sum_k C_{\lambda-\mu}^{n-k}C_{\lambda-\nu}^{m-k}C_{\lambda+k}^k \tag{7-2-19}$$

其中 $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$，以保证积分收敛。

证 由式(7-2-13)有

$$\sum_{n=0}^\infty \mathrm{L}_n^\mu(z)t^n\sum_{m=0}^\infty \mathrm{L}_m^\nu(z)s^m=\sum_{n,m}^\infty \mathrm{L}_n^\mu(z)\mathrm{L}_m^\nu(z)t^ns^m$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-z\left(\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)}}{(1-t)^{\mu+1}(1-s)^{\nu+1}} \quad (|t|<1,\ |s|<1)$$

取 t、$s>0$，将上式两边同乘 z^λ 并对 z 积分，有

$$\sum_{n,m}^\infty t^ns^m\int_0^\infty z^\lambda\mathrm{e}^{-z}\mathrm{L}_n^\mu(z)\mathrm{L}_m^\nu(z)\mathrm{d}z=\int_0^\infty\frac{z^\lambda\mathrm{e}^{-z\frac{1-ts}{(1-t)(1-s)}}}{(1-t)^{\mu+1}\ (1-s)^{\nu+1}}\mathrm{d}z \tag{7-2-20}$$

记 $\zeta=\frac{1-ts}{(1-t)(1-s)}z$，则式(7-2-20)右边成为

$$I=(1-t)^{\lambda-\mu}\ (1-s)^{\lambda-\nu}\ (1-ts)^{-\lambda-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\zeta}\zeta^\lambda\mathrm{d}\zeta$$

式中积分等于 $\Gamma(\lambda+1)$，见式(2-6-2)。于是，利用二项式定理，上式可写为

$$I=\Gamma(\lambda+1)\sum_l C_{\lambda-\mu}^l\ (-t)^l\sum_j C_{\lambda-\nu}^j\ (-s)^j\sum_k C_{-\lambda-1}^k\ (-ts)^k$$

再记 $l+k=n$，$j+k=m$，并注意到 $C_{-\lambda-1}^k=(-)^kC_{\lambda+k}^k$，则上式成为

$$I=\Gamma(\lambda+1)\sum_{n,m}\ (-)^{n+m}t^ns^m\sum_k C_{\lambda-\mu}^{n-k}C_{\lambda-\nu}^{m-k}C_{\lambda+k}^k$$

以此替换式(7-2-20)的右边，比较两边 t^ns^m 项的系数，即得公式(7-2-19)。

证完。

现在可以导出广义拉盖尔多项式的正交关系。

在式(7-2-19)中令 $\lambda=\mu=\nu$。因为 $C_0^{n-k}=\delta_{nk}$，故此时式(7-2-19)右边的求和中仅 $k=n=m$ 的一项不为0，于是有

$$\int_0^\infty z^\mu \mathrm{e}^{-z} \mathrm{L}_n^\mu(z)\mathrm{L}_m^\mu(z)\mathrm{d}z = \Gamma(\mu+1)C_{\mu+n}^n\delta_{nm} = \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{n!}\delta_{nm} \tag{7-2-21}$$

式(7-2-21)即广义拉盖尔多项式的正交关系。

广义的高斯-拉盖尔函数定义如下：

$$\phi_n^\mu(z)=\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\mu+1)}}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{\mu}{2}}\mathrm{L}_n^\mu(z) \tag{7-2-22}$$

由式(7-2-21)可知，$\phi_n^\mu(z)$ 满足以下正交归一关系：

$$\int_0^\infty \phi_n^\mu(z)\phi_m^\mu(z)\mathrm{d}z = \delta_{nm} \tag{7-2-23}$$

在求解渐变光纤中模式场的伽勒金(Galerkin)方法中，函数 $\phi_n^\mu(z)$ 有重要的应用(参见《光波导理论》，吴重庆编，清华大学出版社，2000，第5章)。注意，由于有因子 $z^{\mu/2}$，$\phi_n^\mu(z)$ 一般是多值函数，支点为 $z=0$。一般规定 $-\pi<\arg z<\pi$。图7-2-3给出了几个 $\phi_n^\mu(x)$ 的函数曲线，曲线旁的数字表示参数 (n,μ)。

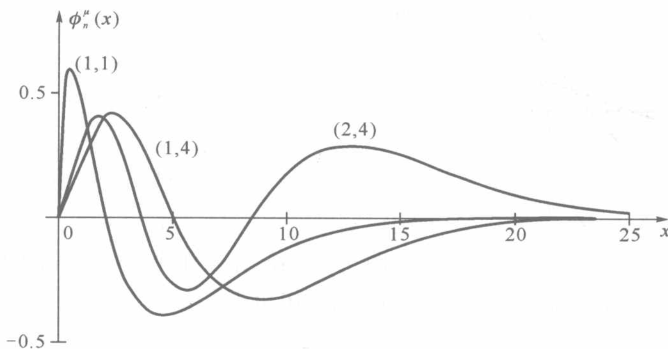


图7-2-3 $\phi_n^\mu(x)$的函数曲线

需要指出的是，$\mathrm{L}_n^\mu(z)$ 的定义式(7-2-2)与《数学手册》(人民教育出版社，1979)中的定义相同。但也有些书籍是将 $n!\,\mathrm{L}_n^\mu(z)$ 定义为广义拉盖尔多项式。在该定义之下，递推关系和正交关系都与本教材不同，应用中需注意识别。

7.3 厄米特方程与厄米特多项式

7.3.1 厄米特方程

在合流超几何方程(7-1-1)中，令 $\gamma=\frac{1}{2}$，$\alpha=-\frac{n}{2}$，$z=\zeta^2$，就给出厄米特(Hermite)方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\zeta^2}-2\zeta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}+2nu=0 \tag{7-3-1}$$

由式(7-1-2)和式(7-1-3)可知，方程(7-3-1)在 $\zeta=0$ 邻域的正则解为

$$u_1(\zeta)=\mathrm{F}\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\zeta^2\right),\quad u_2(\zeta)=\zeta\mathrm{F}\left(-\frac{n-1}{2};\frac{3}{2};\zeta^2\right) \tag{7-3-2}$$

因为当 α 为负整数时 $\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z)$ 为多项式(见 7.2 节中对拉盖尔方程的讨论)，故当 n 为偶数时，$u_1(\zeta)$ 成为 ζ 的 n 次多项式，$u_2(\zeta)$ 仍为无穷级数；而当 n 为奇数时，$u_2(\zeta)$ 成为 ζ 的 n 次多项式，$u_1(\zeta)$ 则为无穷级数。

7.3.2 厄米特多项式 $\mathrm{H}_n(\zeta)$

定义 n 次厄米特多项式为

$$\mathrm{H}_n(\zeta)=\begin{cases}(-)^m\dfrac{(2m)!}{m!}\mathrm{F}\left(-m;\dfrac{1}{2};\zeta^2\right) & (n=2m=0,2,4,\cdots)\\(-)^m\dfrac{(2m+1)!}{m!}2\zeta\mathrm{F}\left(-m;\dfrac{3}{2};\zeta^2\right) & (n=2m+1=1,3,5,\cdots)\end{cases} \tag{7-3-4}$$

显然，$\mathrm{H}_n(\zeta)$ 也是方程(7-3-1)在 $\zeta=0$ 邻域的正则解，因为它与 u_1、u_2 只差一常数因子。易于看出，$\mathrm{H}_n(\zeta)$ 的奇偶性与 n 相同。注意到 $\mathrm{F}(\alpha;\gamma;0)=1$，可知

$$\mathrm{H}_{2m}(0)=(-)^m\frac{(2m)!}{m!},\quad \mathrm{H}_{2m+1}(0)=0 \tag{7-3-5}$$

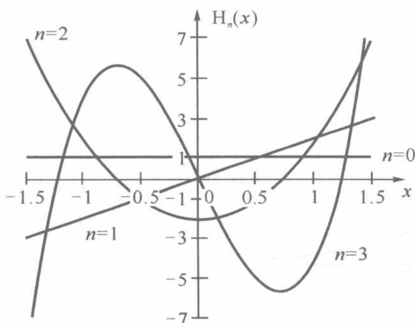


图 7-3-1　$\mathrm{H}_n(x)$的函数曲线

由式(7-3-4)可以写出 $\mathrm{H}_n(\zeta)$ 的多项式表达式，例如：

$$\mathrm{H}_0(\zeta)=1$$
$$\mathrm{H}_1(\zeta)=2\zeta$$
$$\mathrm{H}_2(\zeta)=4\zeta^2-2$$
$$\mathrm{H}_3(\zeta)=8\zeta^3-12\zeta$$
$$\vdots$$

图 7-3-1 给出了几个 $\mathrm{H}_n(x)$ 的函数曲线。

$\mathrm{H}_n(\zeta)$ 还可表示为

$$\mathrm{H}_n(\zeta)=(-)^n\mathrm{e}^{\zeta^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n}(\mathrm{e}^{-\zeta^2}) \tag{7-3-6}$$

证明如下。

记 $\psi=\mathrm{e}^{-\zeta^2}$，则由数学归纳法可知式(7-3-7)成立：

$$\psi^{(n+2)}=-2\zeta\psi^{(n+1)}-2(n+1)\psi^{(n)} \tag{7-3-7}$$

设

$$\psi^{(n)}=(-)^n\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{H}_n(\zeta) \tag{7-3-8}$$

对此式两边求导，则有

$$\psi^{(n+1)}=\left(-2\zeta+\frac{\mathrm{H}_n'}{\mathrm{H}_n}\right)\psi^{(n)}$$

$$\psi^{(n+2)}=\left(-4\zeta\frac{\mathrm{H}_n'}{\mathrm{H}_n}+4\zeta^2+\frac{\mathrm{H}_n''}{\mathrm{H}_n}-2\right)\psi^{(n)}$$

将以上代入式(7-3-7)，可知 $\mathrm{H}_n(\zeta)$ 恰好满足式(7-3-1)，即

$$\frac{d^2 H_n}{d\zeta^2}-2\zeta\frac{dH_n}{d\zeta}+2nH_n=0$$

故式(7-3-8)成立。以 e^{ζ^2} 同乘式(7-3-8)的两边，就得到式(7-3-6)。证完。

由式(7-3-6)或式(7-3-4)可知，$H_n(\zeta)$ 的最高次项系数为 2^n。

7.3.3 $H_n(\zeta)$ 的生成函数与递推关系

将函数

$$f(t,\zeta)=e^{-t^2+2\zeta t}=e^{\zeta^2}e^{-(t-\zeta)^2} \tag{7-3-9}$$

在 $t=0$ 附近作泰勒展开：

$$f(t,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dt^n}\bigg|_{t=0}t^n \tag{7-3-10}$$

令 $z=t-\zeta$，则按式(7-3-9)有

$$\begin{aligned}\frac{d^n f}{dt^n}\bigg|_{t=0}&=\frac{d^n f}{dz^n}\bigg|_{z=-\zeta}=e^{\zeta^2}\left(\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}\right)_{z=-\zeta}\\&=(-)^n e^{\zeta^2}\frac{d^n}{d\zeta^n}e^{-\zeta^2}=H_n(\zeta)\end{aligned}$$

上面最后一步利用了式(7-3-6)。代入式(7-3-10)，即得

$$e^{-t^2+2\zeta t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\zeta)}{n!}t^n \tag{7-3-11}$$

该式左边被称为 $H_n(\zeta)$ 的生成函数。

由式(7-3-11)可以得到 $H_n(\zeta)$ 的递推关系。对式(7-3-11)两边求 t 的一阶导数，比较 t 的同次项系数，可得

$$H_{n+1}-2\zeta H_n+2nH_{n-1}=0 \tag{7-3-12}$$

若对式(7-3-11)两边求 ζ 的一阶导数，比较 t 的同次项系数，则得

$$H_n'=2nH_{n-1} \tag{7-3-13}$$

这里 H'_n 代表 $H_n(\zeta)$ 的一阶导数。

7.3.4 $H_n(\zeta)$ 的正交关系

利用式(7-3-6)，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}H_n^2(\zeta)d\zeta&=(-)^n\int_{-\infty}^{\infty}H_n(\zeta)\frac{d^n(e^{-\zeta^2})}{d\zeta^n}d\zeta\\&=(-)^n\left[H_n(\zeta)\frac{d^{n-1}(e^{-\zeta^2})}{d\zeta^{n-1}}\right]_{-\infty}^{\infty}+(-)^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}H_n'(\zeta)\frac{d^{n-1}(e^{-\zeta^2})}{d\zeta^n}d\zeta\end{aligned} \tag{7-3-14}$$

上式等号右边第一项是 $e^{-\zeta^2}$ 与一个多项式的乘积，故把上限和下限代入都得 0。同理，对第二项继续作分部积分 $n-1$ 次，将会得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}H_n^2(\zeta)d\zeta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n H_n(\zeta)}{d\zeta^n}e^{-\zeta^2}d\zeta \tag{7-3-15}$$

因为 $H_n(\zeta)$ 是 n 次多项式，最高次项为 $2^n\zeta^n$，故它的 n 阶导数是 $2^n n!$。于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}H_n^2(\zeta)d\zeta=2^n n!\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta=2^n n!\sqrt{\pi} \tag{7-3-16}$$

再考虑积分$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\zeta^2} \mathrm{H}_n(\zeta) \mathrm{H}_m(\zeta) \mathrm{d}\zeta$，其中 $n \neq m$。为明确起见，设 $n<m$。对 $\mathrm{H}_m(\zeta)$ 应用式(7-3-6)，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\zeta^2} \mathrm{H}_n(\zeta) \mathrm{H}_m(\zeta) \mathrm{d}\zeta = (-)^m \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_n(\zeta) \frac{\mathrm{d}^m (\mathrm{e}^{-\zeta^2})}{\mathrm{d}\zeta^m} \mathrm{d}\zeta$$

与式(7-3-15)同理，对右边分部积分 n 次，即有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\zeta^2} \mathrm{H}_n(\zeta) \mathrm{H}_m(\zeta) \mathrm{d}\zeta &= (-)^{m-n} 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{m-n} (\mathrm{e}^{-\zeta^2})}{\mathrm{d}\zeta^{m-n}} \mathrm{d}\zeta \\ &= (-)^{m-n} 2^n n! \left. \frac{\mathrm{d}^{m-n-1} (\mathrm{e}^{-\zeta^2})}{\mathrm{d}\zeta^{m-n-1}} \right|_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned} \qquad (7\text{-}3\text{-}17)$$

综合式(7-3-16)和式(7-3-17)，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\zeta^2} \mathrm{H}_n(\zeta) \mathrm{H}_m(\zeta) \mathrm{d}\zeta = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{nm} \qquad (7\text{-}3\text{-}18)$$

此即 $\mathrm{H}_n(\zeta)$ 的正交关系。

光子晶体光纤是近年来光纤理论的一个研究热点。在对光子晶体光纤的研究中会用到高斯-厄米特函数：

$$\psi_n(\zeta) = (2^n n!\ \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \mathrm{H}_n(\zeta) \qquad (7\text{-}3\text{-}19)$$

由式(7-3-18)可知，该函数满足下面的正交归一关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\zeta) \psi_m(\zeta) \mathrm{d}\zeta = \delta_{nm} \qquad (7\text{-}3\text{-}20)$$

熟悉量子力学的读者会认出，ψ_n 也是谐振子的基本波函数。图 7-3-2 绘出了几个 $\psi_n(x)$ 的函数曲线。

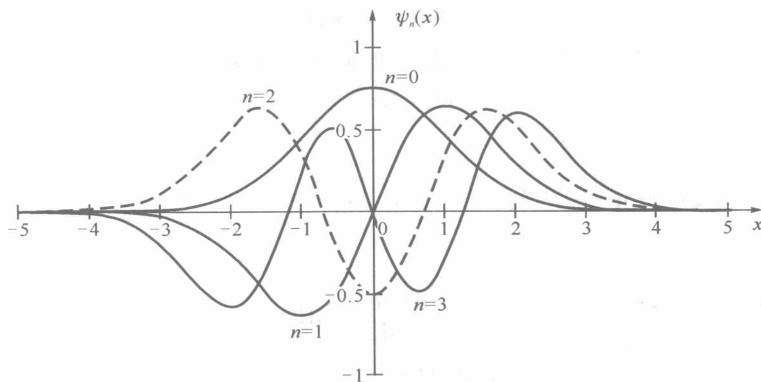


图 7-3-2　$\psi_n(x)$的函数曲线

7.4　惠泰克方程

7.4.1　惠泰克方程与合流超几何方程的关系

惠泰克(Whittaker)方程也属于合流超几何方程，它可由后者变形而得到。

在式(7-1-1)中，令

$$u(z)=\mathrm{e}^{z/2}z^{-\gamma/2}w(z) \tag{7-4-1}$$

则可得 $w(z)$ 满足的方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\left[-\frac{1}{4}+(\frac{\gamma}{2}-\alpha)\frac{1}{z}+\frac{\gamma}{2}(1-\frac{\gamma}{2})\frac{1}{z^2}\right]w=0$$

再取

$$\alpha=\frac{1}{2}+m-k,\ \gamma=1+2m \tag{7-4-2}$$

则方程成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+(\frac{1}{4}-m^2)\frac{1}{z^2}\right]w=0 \tag{7-4-3}$$

此即惠泰克方程。不难看出，方程(7-4-3)的奇点仍是 0 和 ∞。此外，由于 m 的正负对解无影响，故可取 $m\geqslant 0$。

既然惠泰克方程是由合流超几何方程变换而来的，那么它的解也可以由合流超几何方程的解经同样的变换得到。下面分别讨论。

7.4.2 在 $z=0$ 邻域内的正则解　惠泰克 M 函数

在 $1-\gamma$ 为非整数时，合流超几何方程在 $z=0$ 邻域内的两个正则解为

$$u_1=\mathrm{F}(\alpha;\gamma;z),\quad u_2=z^{1-\gamma}\mathrm{F}(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$

对此应用变换式(7-4-1)和式(7-4-2)，可得方程(7-4-3)在 $2m$ 不是整数(包括 0)时的两个线性无关解：

$$w_1=\mathrm{M}_{k,m}(z)\equiv\mathrm{e}^{-z/2}z^{(1+2m)/2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}+m-k;1+2m;z\right) \tag{7-4-4}$$

$$w_2=\mathrm{M}_{k,-m}(z)\equiv\mathrm{e}^{-z/2}z^{(1-2m)/2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}-m-k;1-2m;z\right) \tag{7-4-5}$$

其中 $\mathrm{M}_{k,\pm m}(z)$ 称为惠泰克 M 函数。可以看出，若 $2m>-1$，则 $z=0$ 处 $\mathrm{M}_{k,m}(z)=0$；若 $2m>1$，则在 $z=0$ 处 $\mathrm{M}_{k,-m}(z)=\infty$。若将 m 与 $-m$ 互换，则 w_1 和 w_2 互换。几个 $\mathrm{M}_{k,m}(x)$ 的函数图像如图 7-4-1所示，曲线旁的数字标记的是(k,m)。

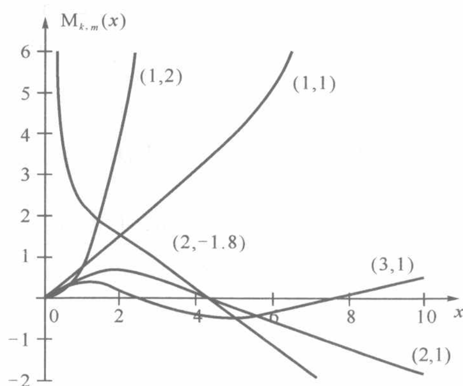


图 7-4-1　$\mathrm{M}_{k,m}(x)$的函数图像

有一种情况需要另行讨论，这就是

$$k<m-\frac{1}{2}\quad(m\ 为大于\ 0\ 的整数或半整数) \tag{7-4-6}$$

的情况。

当 $2m=$ 正整数 s 时，因为

$$(1-2m)_n=(1-s)_s=(1-s)(1-s+1)\cdots(1-s+s-1)=0$$

使 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}-m-k;1-2m;z\right)$ 无意义，故此时 $\mathrm{M}_{k,-m}(z)$ 不存在。但若

$$\begin{cases} \frac{1}{2}-m-k=-l \\ l<2m-1=s-1 \end{cases} \quad (l\ 为正整数) \tag{7-4-7}$$

则 $F\left(\frac{1}{2}-m-k;1-2m;z\right)$ 中的求和指标 n 在增大到 s 之前将先达到 $n=l+1$,从而

$$\left(\frac{1}{2}-m-k\right)_n=(-l)(-l+1)\cdots[-l+(l+1)-1]=0$$

这样 $F\left(\frac{1}{2}-m-k;1-2m;z\right)$ 就成为 l 次多项式。显然,在这种情况下 $M_{k,-m}(z)$ 和 $M_{k,m}(z)$ 线性独立。容易看出条件(7-4-7)就是式(7-4-6)。

综上可知,在 $2m=0$ 和正整数,同时 $-\left(\frac{1}{2}-m-k\right)$ 不是小于 $2m-1$ 的正整数时,w_2 应另行求出。用夫罗比尼斯法可以求得,此时

$$w_2(z)=M_{k,m}(z)\ln z+e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{1}{2}+m}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)_n}{n!(1+2m)_n}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+m-k+n\right)-\right.\right.$$

$$\left.\psi(1+2m+n)-\psi(1+n)\right]z^n+$$

$$\left.(-)^{1+2m}\frac{(2m-1)!(2m)!\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\sum_{n=0}^{2m-1}\frac{\left(\frac{1}{2}-m-k\right)_n}{n!(1-2m)_n}z^{n-2m}\right\} \tag{7-4-8}$$

其中 $\frac{1}{2}-m-k\neq0$ 和负整数。对 $m=0$,去掉括号中的第二项。

值得注意的是,对 $m=0,1,2,\cdots$,由于 $z\to0$ 时,

$$M_{k,m}(z)\ln z\sim z^{\frac{1}{2}+m}\ln z=z^m2\sqrt{z}\ln\sqrt{z}\to0$$

故由式(7-4-8)可以看出,若 $m\geqslant1$,则 $w_2(0)$ 因 $z^{\frac{1}{2}+m}z^{-2m}=z^{\frac{1}{2}-m}$ 而趋于∞;而若 $m=0$,则有 $w_2(0)=0$。

7.4.3 $z=\infty$ 邻域内的常规解

$z=\infty$ 为式(7-4-3)的非正则奇点。对合流超几何方程的常规解式(7-1-15)作变换式(7-4-1)和式(7-4-2),有

$$w_3(z)=e^{-z/2}z^{\gamma/2}u_3=e^{-z/2}z^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)_n\left(\frac{1}{2}-m-k\right)_n}{n!(-z)^n} \tag{7-4-9}$$

至于 w_4,注意到惠泰克方程(7-4-3)在 $z\to-z$, $k\to-k$ 变换下保持不变,故可知对 w_3 作同样的变换也是方程(7-4-3)的解。由此得

$$w_4(z)=e^{z/2}(-z)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+m+k\right)_n\left(\frac{1}{2}-m+k\right)_n}{n!z^n} \tag{7-4-10}$$

以上两式中各有因子 $e^{\pm z/2}$,故知 w_3 和 w_4 线性无关。若对 u_4〔即式(7-1-18)〕作变换式(7-4-1)和式(7-4-2),亦可得式(7-4-10)(但可差一符号)。

7.4.4 惠泰克 W 函数

前面给出的 $M_{k,\pm m}(z)$ 是在 $z=0$ 附近的正则解，不能讨论 $|z|$ 较大时解的渐近性质。为解决此问题，惠泰克引入了两个彼此线性无关的函数，即 $W_{\pm k,m}(z)$，它们对 $|z|$ 较小和 $|z|$ 较大两种情况都适用。$W_{k,m}(z)$ 定义为

$$W_{k,m}(z)=-e^{-\frac{z}{2}}z^{k}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m+k\right)}{2\pi i}\int_{C}e^{-t}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}dt \quad (7\text{-}4\text{-}11)$$

其中 $k+\frac{1}{2}-m\neq 0,-1,-2,\cdots$，路径 C 如图 7-4-2所示，$|\arg z|<\pi$，$|\arg(-t)|\leqslant\pi$。

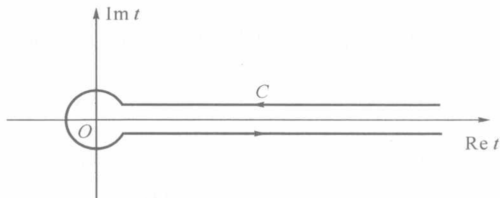


图 7-4-2 积分路径 C

在式(7-4-11)中令 $z\to -z$，$k\to -k$，即给出 $W_{-k,m}(z)$：

$$W_{-k,m}(z)=-\frac{e^{\frac{z}{2}}}{(-z)^{k}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}{2\pi i}\int_{C}e^{-t}(-t)^{k-\frac{1}{2}+m}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-k-\frac{1}{2}+m}dt \quad (7\text{-}4\text{-}12)$$

这里 $\left(-k+\frac{1}{2}-m\right)\neq 0,-1,-2,\cdots$，$|\arg(-z)|<\pi$。

可以证明，在 $z\to\infty$ 时，$W_{\pm k,m}(z)$ 的渐近式就是 w_3 和 w_4，详见《特殊函数概论》(王竹溪等著，北京大学出版社，2000，第 299 页)。

7.5 渐变折射率光纤中的惠泰克方程

7.5.1 纤芯内的场方程

光纤的大致结构如图 7-5-1 所示。ε_1 和 ε_2 分别为纤芯和包层介质的介电常数，它们一般为半径 ρ 的函数。介质的折射率 n 与 ε 的关系是 $n^2=\varepsilon/\varepsilon_0$。图 7-5-2 示意地给出了渐变折射率光纤的一种常见的折射率分布。

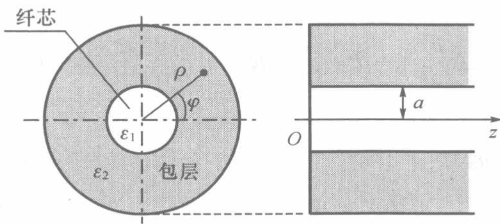


图 7-5-1 光纤结构示意图

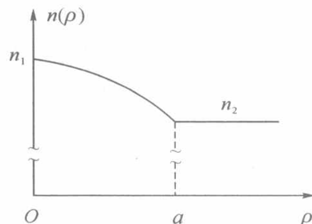


图 7-5-2 光纤的折射率分布

对角频率为 ω 的简谐光波，取时间因子为 $e^{-i\omega t}$，则由麦克斯韦方程组可写出：

$$\begin{cases}[\nabla^2+k^2n^2(\rho)]\boldsymbol{E}+\nabla\left(\dfrac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}\right)=0\\[\nabla^2+k^2n^2(\rho)]\boldsymbol{H}+\dfrac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=0\end{cases}\tag{7-5-1}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别为电场强度和磁场强度，$k=\omega/c$，c 为真空中的光速。

本节只考虑纤芯内(即 $\rho\leqslant a$ 处)的场方程。假定 ε 或 n 随 ρ 的变化很弱：$\nabla\varepsilon/\varepsilon\ll1$,则方程组(7-5-1)可简化为

$$[\nabla^2+k^2n^2(\rho)]\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{H}\end{pmatrix}=0\tag{7-5-2}$$

在柱坐标系(ρ,φ,z)中,单位矢 $\boldsymbol{e}_z$为常矢,故对场的 z 分量,有

$$[\nabla^2+k^2n^2(\rho)]\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix}=0\tag{7-5-3}$$

由此知 E_z和 H_z只能相差一个常数因子,故只需求出其中任何一个,例如 E_z。求得 E_z和 H_z后,再根据 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$，$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$,可通过求偏导数进一步求得 E_ρ、E_φ和 H_ρ、H_φ,这是波导理论中熟知的方法。本节只介绍方程(7-5-3)的求解。

假定电磁波沿正 z 方向传播,则可设

$$E_z(\rho,\varphi,z;t)=R(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta z+m\varphi-\omega t)}\quad(m=0,1,2,\cdots)\tag{7-5-4}$$

代入式(7-5-3),可知 $R(\rho)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left[k^2n^2(\rho)-\beta^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right]R=0\tag{7-5-5}$$

假定纤芯内 $n(\rho)$ 按下式变化：

$$n^2(\rho)=n_1^2\left(1-\frac{n_1^2-n_2^2}{n_1^2}\frac{\rho^2}{a^2}\right)\tag{7-5-6}$$

引入折射率差：

$$\Delta=(n_1-n_2)/n_1\tag{7-5-7}$$

并假定 $\Delta\ll1$,则有

$$n_2^2=n_1^2(1-\Delta)^2\approx n_1^2(1-2\Delta)\tag{7-5-8}$$

于是式(7-5-6)可写为

$$n^2(\rho)\approx n_1^2\left(1-2\Delta\frac{\rho^2}{a^2}\right)\tag{7-5-9}$$

由此,式(7-5-5)可近似写为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left[k^2n_1^2\left(1-2\Delta\frac{\rho^2}{a^2}\right)-\beta^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right]R=0\tag{7-5-10}$$

引入记号：

$$V^2=k^2a^2(n_1^2-n_2^2)=k^2a^2n_1^22\Delta\tag{7-5-11}$$

$$u^2=a^2(k^2n_1^2-\beta^2)\tag{7-5-12}$$

则式(7-5-10)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left[\frac{u^2}{a^2}\left(1-\frac{V^2}{u^2}\frac{\rho^2}{a^2}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}\right]R=0\tag{7-5-13}$$

V 称为归一化频率,它是光纤分析中的一个常用名词。

7.5.2 化为惠泰克方程

为求解方程(7-5-13),可通过适当变换将其化为惠泰克方程。设

$$R(\rho)=\Phi(\rho)/\sqrt{\rho} \tag{7-5-14}$$

则方程(7-5-13)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\rho^2}+\left[\frac{u^2}{a^2}\left(1-\frac{V^2}{u^2}\frac{\rho^2}{a^2}\right)-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\rho^2}\right]\Phi=0 \tag{7-5-15}$$

记

$$\frac{V}{ua}\rho=\zeta,\quad h=u^2/V \tag{7-5-16}$$

则式(7-5-15)可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\zeta^2}+\left[h^2(1-\zeta^2)-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\zeta^2}\right]\Phi=0 \tag{7-5-17}$$

再令

$$x=h\zeta^2,\quad \Phi=x^{-1/4}\psi(x) \tag{7-5-18}$$

则方程(7-5-17)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{h/4}{x}+\frac{(1-m^2)/4}{x^2}\right]\psi=0 \tag{7-5-19}$$

将此式与式(7-4-3)相比较,可见这里的 $h/4$ 相当于式(7-4-3)中的 k,而这里的 m 则相当于式(7-4-3)中的 $2m$,故该式属于惠泰克方程。

7.5.3 方程(7-5-13)的解

方程(7-5-13)属于区域 $0\leqslant\rho\leqslant a$,而在变形为方程(7-5-19)的过程中作过两次坐标变换,即 $\zeta=V\rho/ua$ 和 $x=h\zeta^2$,因此应取方程(7-5-19)在 $x=0$ 邻域内收敛的正则解。根据方程(7-5-19)与方程(7-4-3)的对应关系,可知此解就是式(7-4-4)在 k 改为 $h/4$, m 改为 $m/2$ 时的结果:

$$\psi(x)=\mathrm{M}_{h/4,m/2}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{1+m}{2}}\mathrm{F}\left(\frac{1+m}{2}-\frac{h}{4};1+m;x\right) \tag{7-5-20}$$

其中 $m=0,1,2,\cdots$。另一解在 $x=0$ 处发散(当 $m\geqslant1$ 时),故不取。

这样,由式(7-5-14)、式(7-5-16)及式(7-5-18)可得

$$R(\rho)=\frac{\Phi}{\sqrt{ua\zeta/V}}=\frac{V^{1/4}}{\sqrt{a}}\frac{\psi(x)}{\sqrt{x}} \tag{7-5-21}$$

又由式(7-5-16)以及式(7-5-17)和式(7-5-18)得 $x=V\rho^2/a^2$。引入常数 $s=a/\sqrt{V}$,则 $x=\rho^2/s^2$。代入式(7-5-21),得到

$$R(\rho)=\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2s^2}}\frac{\rho^m}{s^m}\mathrm{F}\left(\frac{1+m}{2}-\frac{u^2}{4V};1+m;\frac{\rho^2}{s^2}\right) \tag{7-5-22}$$

显然,$R(0)=0$。

将式(7-5-22)代入式(7-5-4),就得到了纤芯内的 E_z。

习 题 7

7.1 证明式(7-2-7)。

7.2 证明：

(1) $\int_0^x e^{-t^2} H_n(t) dt = H_{n-1}(0) - e^{-x^2} H_{n-1}(x)$；

(2) $\int_0^x H_n(t) dt = \frac{1}{2(n+1)}[H_{n+1}(x) - H_{n+1}(0)]$；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_{2n}(xt) dt = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n!}(x^2-1)^n$；

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} tH_{2n+1}(xt) dt = \sqrt{\pi}\frac{(2n+1)!}{n!}x(x^2-1)^n$。

7.3 证明：

(1) $\frac{d^m}{dx^m}[x^\mu L_n^\mu(x)]=(n-m+\mu+1)_m x^{\mu-m} L_n^{\mu-m}(x)$；

(2) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k H_{2k}(x) H_{2n-2k}(y)=(-)^n n!\ L_n(x^2+y^2)$；

(3) $\int_x^{\infty} e^{-t} L_n^\mu(t) dt = e^{-x}[L_n^\mu(x) - L_{n-1}^\mu(x)]$。

7.4 求 $\frac{d}{dz}M_{k,\pm m}(z)$。

第 8 章　贝塞尔方程与贝塞尔函数

本章不仅讨论贝塞尔方程的解，也将讨论球贝塞尔方程和变型(或虚宗量)贝塞尔方程的解。

8.1　贝塞尔方程概述

8.1.1　贝塞尔方程

贝塞尔(Bessel)方程的基本形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}+\left(1-\frac{\nu^2}{\zeta^2}\right)u=0 \tag{8-1-1}$$

其中 ν 为常数，称为方程及其解的阶，可为任意实数或复数。

在分析光纤中的电磁场时，要在柱坐标系中对亥姆霍兹方程分离变量。当折射率为常数时，可得径向方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\mu^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0$$

其中 μ 为与半径 ρ 无关的常数，$m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$。令 $\rho=\zeta/\mu$，则方程成为 m 阶的贝塞尔方程〔$R=R(\zeta)$〕：

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\zeta}+\left(1-\frac{m^2}{\zeta^2}\right)R=0$$

8.1.2　球贝塞尔方程

在 6.1 节中，我们在球坐标系中对亥姆霍兹方程分离变量，曾得径向方程(6-1-5)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+[k^2 r^2-l(l+1)]R=0$$

其中 l 是分离变量时引入的参数。现令 $r=\zeta/k$，则方程成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{2}{\zeta}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\zeta}+\left[1-\frac{l(l+1)}{\zeta^2}\right]R=0 \tag{8-1-2}$$

此即 l 阶的球贝塞尔方程。

在半奇数阶$\left[\text{即 }\nu=\dfrac{(2l+1)}{2}=l+\dfrac{1}{2},l\text{ 为整数}\right]$贝塞尔方程(8-1-1)中令$u(\zeta)=\zeta^{1/2}R(\zeta)$，亦可得到方程(8-1-2)。

8.1.3 与合流超几何微分方程和惠泰克方程的联系

对合流超几何微分方程(7-1-1)作如下变换：

$$z=2\mathrm{i}\zeta,\qquad u=\zeta^{-\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}\phi(\zeta) \tag{8-1-3}$$

则可导出关于ϕ的方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{\gamma-2\nu}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta}+\left[1+\frac{\mathrm{i}(\gamma-2\alpha)}{\zeta}+\frac{\nu(\nu+1-\gamma)}{\zeta^2}\right]\phi=0 \tag{8-1-4}$$

令其中

$$\gamma=2\alpha=2\nu+1 \tag{8-1-5}$$

则式(8-1-4)成为ν阶的贝塞尔方程(8-1-1)。

又若令

$$\gamma=2\alpha=2\nu+2 \tag{8-1-6}$$

则式(8-1-4)成为ν阶的球贝塞尔方程(8-1-2)。

贝塞尔方程(8-1-1)亦可由惠泰克方程变形得到。在惠泰克方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\left(\frac{1}{4}-m^2\right)\frac{1}{z^2}\right]w=0$$

中，令$k=0,m=\nu$，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\left[-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\frac{1}{z^2}\right]w=0 \tag{8-1-7}$$

再令

$$z=2\mathrm{i}\zeta,\qquad w(z)=\zeta^{1/2}u(\zeta) \tag{8-1-8}$$

方程(8-1-7)即成为方程(8-1-1)。

以上提示我们，贝塞尔方程的解可由已知的合流超几何方程或惠泰克方程的解得到。例如惠泰克方程(8-1-7)在正则奇点$\zeta=0$邻域的一个正则解为$\mathrm{M}_{0,\nu}(z)$，于是贝塞尔方程(8-1-1) 在$\zeta=0$邻域的一个正则解可以写为

$$\begin{aligned}u(\zeta)&=C_\nu\zeta^{-1/2}\mathrm{M}_{0,\nu}(2\mathrm{i}\zeta)\\&=C_\nu\zeta^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}(2\mathrm{i}\zeta)^{\frac{1}{2}+\nu}\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}+\nu;1+2\nu;2\mathrm{i}\zeta\right)\\&\propto\zeta^{\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\pm\nu;1\pm2\nu;2\mathrm{i}\zeta\right)\end{aligned} \tag{8-1-9}$$

式中C_ν为常数。不过，这种形式并不常用，而且用这种方法求线性无关的第二解也不方便。所以，在下一节将仍按求正则解的一般方法解贝塞尔方程。

8.2 贝塞尔方程在$\zeta=0$邻域的正则解　三类贝塞尔函数

8.2.1 第一类贝塞尔函数

$\zeta=0$是方程(8-1-1)的正则奇点。在该点的邻域中，

$$\zeta p(\zeta)=1=\sum_{m=0}^{\infty} b_m\zeta^m,\quad \zeta^2 q(\zeta)=\zeta^2-\nu^2=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\zeta^m$$

即有

$$b_0=1, b_1=b_2=\cdots=0$$

$$c_0=-\nu^2, c_2=1, c_1=c_3=c_4\cdots=0$$

于是得指标方程 $\rho(\rho-1)+\rho-\nu^2=0$，两个解为 $\rho=\pm\nu$。

对 $\rho_1=\nu$，有正则解

$$u(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^{n+\nu} \tag{8-2-1}$$

其中 a_n 满足递推公式(4-2-6)：

$$a_n=-\frac{\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\left[(n-m+\rho)b_m+c_m\right]}{(n+\rho)(n+\rho-1)+(n+\rho)b_0+c_0} \tag{8-2-2}$$

把上述 b_k、c_k 代入式(8-2-2)，可得

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)} \tag{8-2-3}$$

在式(8-2-2)中令 $n=1$，注意到 $b_1=c_1=0$，而分母不为 0，故有 $a_1=0$。由此以及式(8-2-3)可知 $a_{2k+1}=0(k=0,1,2,\cdots)$。至于 a_{2k}，式(8-2-3)则给出

$$\begin{aligned}a_{2k}&=-\frac{a_{2(k-1)}}{2k(2k+2\nu)}=-\frac{a_{2(k-1)}}{2^2k(k+\nu)}\\&=\frac{-1}{2^2k(k+\nu)}\cdot\frac{-1}{2^2(k-1)(k+\nu-1)}\cdots\frac{-1}{2^2\cdot1\cdot(\nu+1)}a_0\\&=\frac{(-)^k}{2^{2k}k!\ (\nu+1)_k}a_0=\frac{(-)^k\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\ \Gamma(k+\nu+1)}a_0\end{aligned}$$

于是式(8-2-1)成为

$$u(\zeta)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k\Gamma(\nu+1)2^\nu}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+\nu}$$

令 $a_0=[\Gamma(\nu+1)2^\nu]^{-1}$，所得的 $u(\zeta)$ 即为第一类贝塞尔函数：

$$\mathrm{J}_\nu(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{8-2-4}$$

显然

$$\mathrm{J}_0(0)=1,\quad \mathrm{J}_\nu(0)=0\quad(\nu>0) \tag{8-2-5}$$

现在考虑 $\rho_2=-\nu$ 的正则解。

注意到 ν 改变符号时，方程(8-1-1)不变，故式(8-2-4)中 ν 改为 $-\nu$ 后，仍为方程(8-1-1)的解。但这时 ρ_1 变成了 ρ_2，于是得到了对应于 $\rho_2=-\nu$ 的一种正则解：

$$\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k-\nu} \tag{8-2-6}$$

当 $\rho_1-\rho_2=2\nu\neq0$ 和整数时，$\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)$ 与 $\mathrm{J}_\nu(\zeta)$ 线性独立，这只要由 $\zeta\to0$ 时 $\mathrm{J}_\nu(\zeta)/\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)\sim\zeta^{2\nu}$ 即可看出。

但在 ν 为整数 l 时，$\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)$ 与 $\mathrm{J}_\nu(\zeta)$ 线性相关。事实上，$\mathrm{J}_{-l}(\zeta)$ 与 $\mathrm{J}_l(\zeta)$ 有以下关系：

$$J_{-l}(\zeta)=(-)^l J_l(\zeta) \tag{8-2-7}$$

证明如下。

对给定的 l，当 $k=0,1,2,\cdots,l-1$ 时，依次有 $k-l+1=-(l-1),-(l-2),\cdots,-1,0$。因为 0 和负整数都是 Γ 函数的奇点，故式(8-2-6)中 $k<l$ 的各项皆因分母中 $\Gamma(k-l+1)\to\infty$而成为 0。所以式(8-2-6)的求和从 $k=l$ 开始：

$$J_{-l}(\zeta)=\sum_{k=l}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-l+1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k-l}$$

作变换 $k=k'+l$，则上式成为

$$J_{-l}(\zeta)=\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-)^{k'+l}}{(k'+l)!\Gamma(k'+1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k'+l}$$

因为

$$(k'+l)!\ \Gamma(k'+1)=\Gamma(k'+l+1)k'!$$

所以上式即

$$J_{-l}(\zeta)=\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-)^{k'+l}}{k'!\Gamma(k'+l+1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k'+l}=(-)^l J_l(\zeta)$$

证完。

事实上，即使是用取极限的方法（令 $\nu\to l$），也不能由 $J_{-\nu}(\zeta)$得到与 $J_\nu(\zeta)$线性无关的解。对此说明如下：

因为 J_ν 和 $J_{-\nu}$都是方程(8-1-1)的解，故式(8-1-1)可写为

$$\frac{1}{\zeta}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\frac{dJ_{\pm\nu}}{d\zeta}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{\zeta^2}\right)J_{\pm\nu}=0$$

以 $\zeta J_{-\nu}$乘 J_ν 满足的方程，以 ζJ_ν 乘 $J_{-\nu}$满足的方程，然后两式相减，可得

$$J_{-\nu}(\zeta J'_\nu)'-J_\nu(\zeta J'_{-\nu})'=0$$

撇号表示对 ζ 求导。此式又可写为

$$\frac{d}{d\zeta}[\zeta(J'_\nu J_{-\nu}-J'_{-\nu}J_\nu)]=0$$

故有

$$\zeta(J'_\nu J_{-\nu}-J'_{-\nu}J_\nu)=\text{常数}$$

把 $J_{\pm\nu}(\zeta)$的级数表达式代入上式，并利用式(2-6-15)，可知该常数为$\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}$，证明留作习题。于是有

$$J'_\nu J_{-\nu}-J'_{-\nu}J_\nu=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi\zeta} \tag{8-2-8}$$

当 $\nu\to$整数时，式(8-2-8)右边为 0，此时有

$$\frac{J'_\nu}{J_\nu}=\frac{J'_{-\nu}}{J_{-\nu}}\quad \text{或}\quad \ln J_\nu=C+\ln J_{-\nu}$$

这时 $J_\nu(\zeta)$与 $J_{-\nu}(\zeta)$仅相差一个常数因子。可见当 $\nu\to$整数时，$J_\nu(\zeta)$与 $J_{-\nu}(\zeta)$线性相关。

对任何 ν 值（$\nu=$整数或非整数）皆与 $J_\nu(\zeta)$线性无关的解是下面介绍的第二类贝塞尔函数。

8.2.2 第二类贝塞尔函数

第二类贝塞尔函数又称纽曼(Neumann)函数，记为 $N_\nu(\zeta)$〔也有记为 $Y_\nu(\zeta)$的〕。

先直接给出 ν 为整数时的解。对 $\nu=l=0,1,2,\cdots$ 的情况，按夫罗比尼斯法可以求得

$$
\mathrm{N}_l(\zeta)=\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_l(\zeta)\ln\frac{\zeta}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{l-1}\frac{(l-n-1)!}{n!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n-l}-
$$

$$
\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!(l+n)!}\left[\psi(l+n+1)+\psi(n+1)\right]\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n+l} \tag{8-2-9}
$$

其中 ψ 函数的定义和计算公式分别见式(5-2-13)和式(5-2-16)。对 $l=0$，去掉等号右边第二项。

下面求适用于任何 ν 值(ν 为整数或非整数)的 $\mathrm{N}_\nu(\zeta)$，从中还可得到一些有用的关系式。采用的方法是，先设

$$
\mathrm{N}_\nu(\zeta)=a\mathrm{J}_\nu(\zeta)+b\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta) \tag{8-2-10}
$$

然后根据 $\nu\to l$ 时 $\mathrm{N}_\nu(\zeta)$ 与 $\mathrm{J}_\nu(\zeta)$ 线性无关的要求，确定 a 和 b 的值。

按微分方程理论，若 $\mathrm{N}_\nu(\zeta)$ 与 $\mathrm{J}_\nu(\zeta)$ 线性无关，则二者的朗斯基(Wronski)行列式

$$
W(\mathrm{J}_\nu,\mathrm{N}_\nu)\equiv\begin{vmatrix}\mathrm{J}_\nu & \mathrm{N}_\nu\\ \mathrm{J}'_\nu & \mathrm{N}'_\nu\end{vmatrix}\neq 0
$$

由式(8-2-10)和式(8-2-8)有

$$
W(\mathrm{J}_\nu,\mathrm{N}_\nu)=b(\mathrm{J}'_{-\nu}\mathrm{J}_\nu-\mathrm{J}_{-\nu}\mathrm{J}'_\nu)=-2b\,\frac{\sin\nu\pi}{\pi\zeta} \tag{8-2-11}
$$

因此，若 $\nu\to l$ 时 $\mathrm{N}_\nu(\zeta)$ 与 $\mathrm{J}_\nu(\zeta)$ 线性无关，b 必须与 $\sin\nu\pi$ 成反比。

另一方面，因为 $\nu\to l$ 时 $\mathrm{J}_\nu(\zeta)$ 与 $\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)$ 线性相关，故又要求 $\nu\to l$ 时 $\mathrm{N}_\nu(\zeta)$ 也与 $\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)$ 线性无关。于是又有

$$
W(\mathrm{J}_{-\nu},\mathrm{N}_\nu)=a(\mathrm{J}_{-\nu}\mathrm{J}'_\nu-\mathrm{J}_\nu\mathrm{J}'_{-\nu})=2a\,\frac{\sin\nu\pi}{\pi\zeta} \tag{8-2-12}
$$

可见 a 也必须与 $\sin\nu\pi$ 成反比。

根据上面的分析，可设

$$
a=\frac{\alpha(\nu)}{\sin\nu\pi},\quad b=\frac{\beta(\nu)}{\sin\nu\pi} \tag{8-2-13}
$$

以此代入式(8-2-10)，得

$$
\mathrm{N}_\nu(\zeta)=\frac{1}{\sin\nu\pi}[\alpha(\nu)\mathrm{J}_\nu(\zeta)+\beta(\nu)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)] \tag{8-2-14}
$$

显然，为使 $\nu\to l$ 时 $\mathrm{N}_\nu(\zeta)$ 有意义，必须有

$$
\lim_{\nu\to l}[\alpha(\nu)\mathrm{J}_\nu(\zeta)+\beta(\nu)\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)]=0
$$

因为 $\mathrm{J}_{-l}(\zeta)=(-)^l\mathrm{J}_l(\zeta)$，故上式要求

$$
[\alpha(\nu)+(-)^l\beta(\nu)]_{\nu\to l}=0
$$

据此可取

$$
\alpha(\nu)=\cos\nu\pi,\quad \beta(\nu)=-1 \tag{8-2-15}
$$

代入式(8-2-14)，即得

$$
\mathrm{N}_\nu(\zeta)=\frac{\cos\nu\pi\mathrm{J}_\nu(\zeta)-\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)}{\sin\nu\pi} \tag{8-2-16}
$$

式(8-2-16)即纽曼函数的一般形式。在 $\nu\to l$ 时，右边成为 $\frac{0}{0}$，但极限存在。

$$N_l(\zeta)=\lim_{\nu\to l}N_\nu(\zeta)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\bigg|_{\nu\to l}-(-)^l\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\bigg|_{\nu\to l}\right]$$

把 $J_{\pm\nu}(\zeta)$的级数表达式代入，即可得到式(8-2-9)。

这样，对于任意的 ν 值，贝塞尔方程(8-1-1)在 $\zeta=0$ 邻域内的通解总可写为

$$u=c_1J_\nu(\zeta)+c_2N_\nu(\zeta)$$

另外，把式(8-2-13)、式(8-2-15)代入式(8-2-11)、式(8-2-12)，可以得到下面两个重要的关系式：

$$W(J_\nu,N_\nu)=J_\nu N'_\nu-N_\nu J'_\nu=\frac{2}{\pi\zeta} \tag{8-2-17}$$

$$W(J_{-\nu},N_\nu)=J_{-\nu}N'_\nu-N_\nu J'_{-\nu}=\frac{2}{\pi\zeta}\cos\nu\pi \tag{8-2-18}$$

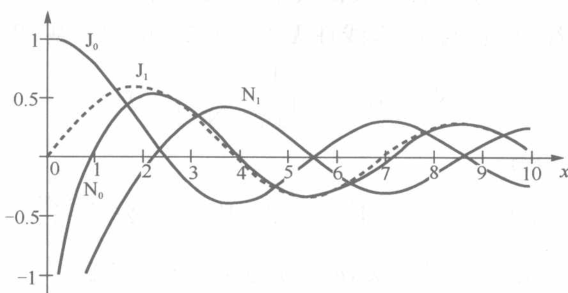


图 8-2-1 $J_l(x)$和 $N_l(x)$曲线

图 8-2-1 给出了 $l=0$、1 的 $J_l(x)$和 $N_l(x)$曲线。由图可见，在 x 较大时，$N_0(x)\approx J_1(x)$。事实上，用鞍点法(见 8.6 节)可以证明，在 x 很大时，有以下大宗量近似式：

$$J_l(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x-\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \tag{8-2-19}$$

$$N_l(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x-\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \tag{8-2-20}$$

8.2.3 第三类贝塞尔函数

除上述两类贝塞尔函数外，还可定义第三类贝塞尔函数，又称汉克尔(Hankel)函数，它们常被应用在对行波问题的分析中。

第三类贝塞尔函数分为两种，分别定义如下：

$$H_\nu^{(1)}(\zeta)=J_\nu(\zeta)+iN_\nu(\zeta) \tag{8-2-21}$$

$$H_\nu^{(2)}(\zeta)=J_\nu(\zeta)-iN_\nu(\zeta) \tag{8-2-22}$$

$H_\nu^{(1)}(\zeta)$和 $H_\nu^{(2)}(\zeta)$分别称为第一种和第二种汉克尔函数。

由于 $J_\nu(\zeta)$和 $N_\nu(\zeta)$线性无关，故 $H_\nu^{(1)}(\zeta)$、$H_\nu^{(2)}(\zeta)$也与 $J_\nu(\zeta)$、$N_\nu(\zeta)$线性无关，当然 $H_\nu^{(1)}(\zeta)$和 $H_\nu^{(2)}(\zeta)$也线性无关。

可以证明，两种汉克尔函数之间有以下关系：

$$H_\nu^{(1)}(e^{i\pi}\zeta)=-e^{i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(\zeta) \tag{8-2-23}$$

证明留作习题。

由 $J_l(\zeta)$ 和 $N_l(\zeta)$ 的大宗量近似式(8-2-19)和式(8-2-20)，可知汉克尔函数有以下大宗量近似式：

$$H_l^{(1)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left[x-\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \tag{8-2-24}$$

$$H_l^{(2)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left[x-\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \tag{8-2-25}$$

把式中的 x 换为 $k\rho$(这里 k 为波数，ρ 为场点到线状源的距离)，即可看出 $H_l^{(1)}(k\rho)$ 和 $H_l^{(2)}(k\rho)$ 都对应于柱面波。

8.2.4 递推关系

由 $J_\nu(\zeta)$ 的级数表达式(8-2-4)，有

$$\frac{d}{d\zeta}(\zeta^\nu J_\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(k+\nu)2^\nu}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2(k+\nu)-1}$$

因为 $\Gamma(\nu+k+1)=(k+\nu)\Gamma(k+\nu)$，故上式可写为

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}(\zeta^\nu J_\nu)&=\zeta^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}\\&=\zeta^\nu J_{\nu-1}(\zeta)\end{aligned} \tag{8-2-26}$$

从而有

$$J_{\nu-1}=\zeta^{-\nu}(\zeta^\nu J_\nu)'=J'_\nu+\frac{\nu}{\zeta}J_\nu$$

或

$$J'_\nu(\zeta)=J_{\nu-1}-\frac{\nu}{\zeta}J_\nu \tag{8-2-27}$$

类似地可以写出

$$\frac{d}{d\zeta}(\zeta^{-\nu}J_\nu)=-\zeta^{-\nu}J_{\nu+1}(\zeta) \tag{8-2-28}$$

从而又有

$$J_{\nu+1}=-\zeta^\nu(\zeta^{-\nu}J_\nu)'=-J'_\nu+\frac{\nu}{\zeta}J_\nu$$

或

$$J'_\nu(\zeta)=\frac{\nu}{\zeta}J_\nu-J_{\nu+1} \tag{8-2-29}$$

公式(8-2-27)和(8-2-29)是常用的。特别地，在式(8-2-29)中令 $\nu=0$，又有

$$J'_0(\zeta)=-J_1(\zeta) \tag{8-2-30}$$

由式(8-2-27)和式(8-2-29)还可写出另外的公式。两式相加，有

$$J'_\nu(\zeta)=\frac{1}{2}[J_{\nu-1}(\zeta)-J_{\nu+1}(\zeta)] \tag{8-2-31}$$

两式相减，则又有

$$J_\nu=\frac{\zeta}{2\nu}[J_{\nu+1}(\zeta)+J_{\nu-1}(\zeta)] \tag{8-2-32}$$

此外，注意到式(8-2-26)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\zeta\mathrm{d}\zeta}(\zeta^{\nu}\mathrm{J}_{\nu})=\zeta^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(\zeta)$$

于是有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\zeta\mathrm{d}\zeta}\right)^{2}(\zeta^{\nu}\mathrm{J}_{\nu})=\frac{\mathrm{d}}{\zeta\mathrm{d}\zeta}(\zeta^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1})=\zeta^{\nu-2}\mathrm{J}_{\nu-2}$$

依次类推，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\zeta\mathrm{d}\zeta}\right)^{l}(\zeta^{\nu}\mathrm{J}_{\nu})=\zeta^{\nu-l}\mathrm{J}_{\nu-l}(l=0,1,2,\cdots) \tag{8-2-33}$$

类似地，由式(8-2-28)可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\zeta\mathrm{d}\zeta}\right)^{l}(\zeta^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu})=(-)^{l}\zeta^{-(\nu+l)}\mathrm{J}_{\nu+l} \tag{8-2-34}$$

由于 $\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)$是 $\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)$和 $\mathrm{J}_{-\nu}(\zeta)$的线性组合，故可推知 $\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)$也满足同样的递推关系。又因 $\mathrm{H}_{\nu}^{(1)}(\zeta)$和 $\mathrm{H}_{\nu}^{(2)}(\zeta)$是 $\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)$和 $\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)$的线性组合，故它们也满足以上递推关系。

8.2.5 半奇数阶贝塞尔函数的初等函数形式

半奇数阶，即 $\nu=l+\dfrac{1}{2}$，这里 l 为整数。各类半奇数阶贝塞尔函数可表示为初等函数或初等函数的高阶导数。

先考察 $l=0$ 的情况。在 $\mathrm{J}_{\nu}(\zeta)$的级数表达式(8-2-4)中令 $\nu=1/2$，有

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^{k}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

根据公式(2-6-19)，有

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{(2k+1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2k+1}k!}$$

故

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^{k}}{(2k+1)!}\zeta^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\sin\zeta \tag{8-2-35}$$

同样可得

$$\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\cos\zeta \tag{8-2-36}$$

把式(8-2-35)和式(8-2-36)代入 $\mathrm{N}_{\nu}(\zeta)$的定义式(8-2-16)，又有

$$\mathrm{N}_{\frac{1}{2}}(\zeta)=-\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(\zeta)=-\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\cos\zeta \tag{8-2-37}$$

$$\mathrm{N}_{-\frac{1}{2}}(\zeta)=\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\sin\zeta \tag{8-2-38}$$

由以上还可以写出

$$\mathrm{H}_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\zeta)=\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(\zeta)+\mathrm{i}\mathrm{N}_{\frac{1}{2}}(\zeta)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta} \tag{8-2-39}$$

$$\mathrm{H}_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\zeta)=\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(\zeta)-\mathrm{i}\mathrm{N}_{\frac{1}{2}}(\zeta)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta} \tag{8-2-40}$$

以及

$$H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}e^{i\zeta},\quad H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}e^{-i\zeta} \tag{8-2-41}$$

现在考虑 $l>0$ 的情况。在递推公式(8-2-34)中令 $\nu=\frac{1}{2}$，利用式(8-2-35)，可得

$$\begin{aligned} J_{l+\frac{1}{2}}(\zeta)&=(-)^{l}\zeta^{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^{l}[\zeta^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(\zeta)] \\ &=(-)^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\zeta^{l+1}\left(\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^{l}\left(\frac{\sin\zeta}{\zeta}\right) \end{aligned} \tag{8-2-42}$$

类似地，在式(8-2-33)中令 $\nu=-\frac{1}{2}$，利用式(8-2-36)，则可得到

$$J_{-(l+\frac{1}{2})}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\zeta^{l+1}\left(\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^{l}\left(\frac{\cos\zeta}{\zeta}\right) \tag{8-2-43}$$

可见 $l>0$ 的半奇数阶贝塞尔函数可以用初等函数的 l 阶导数表示出来。

注意到式(8-2-33)、式(8-2-34)对 $N_\nu(\zeta)$和 $H^{(1)}_\nu(\zeta)$、$H^{(2)}_\nu(\zeta)$都成立，故可类似地导出这些函数在 ν 为半奇数时的初等函数形式。例如

$$N_{l+\frac{1}{2}}(\zeta)=(-)^{l+1}\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\zeta^{l+1}\left(\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^{l}\left(\frac{\cos\zeta}{\zeta}\right) \tag{8-2-44}$$

$$N_{-(l+\frac{1}{2})}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\zeta^{l+1}\left(\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^{l}\left(\frac{\sin\zeta}{\zeta}\right) \tag{8-2-45}$$

等等。

8.3 球贝塞尔函数

l 阶球贝塞尔函数是 l 阶球贝塞尔方程(8-1-2)的解。在 8.1 节中已经了解到，方程(8-1-2)是由半奇数阶贝塞尔方程经变换 $\Psi(\zeta)=\sqrt{\zeta}R(\zeta)$而得到的，这里 $R(\zeta)$代表球贝塞尔方程的解，而 Ψ 则代表 J_ν、N_ν 以及 $H^{(1)}_\nu$ 和 $H^{(2)}_\nu$(其中 $\nu=l+\frac{1}{2}$)中的任一个。由此可知 l 阶球贝塞尔方程在 $\zeta=0$ 邻域内的解为

$$\psi_l(\zeta)=\frac{C}{\sqrt{\zeta}}\Psi_{l+\frac{1}{2}}(\zeta)$$

这里 $\psi_l(\zeta)$代表与 $J_{l+\frac{1}{2}}(\zeta)$、$N_{l+\frac{1}{2}}(\zeta)$、$H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(\zeta)$和 $H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(\zeta)$相对应的球贝塞尔函数，依次记为 $j_l(\zeta)$、$n_l(\zeta)$、$h^{(1)}_l(\zeta)$和 $h^{(2)}_l(\zeta)$。取 $C=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，则有

$$\psi_l(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\Psi_{l+\frac{1}{2}}(\zeta) \tag{8-3-1}$$

由贝塞尔函数的递推关系可得各个球贝塞尔函数 $\psi_l(\zeta)$的递推关系：

$$\psi_{l-1}+\psi_{l+1}=\frac{2l+1}{\zeta}\psi_l \tag{8-3-2}$$

$$l\psi_{l-1}-(l+1)\psi_{l+1}=(2l+1)\frac{\mathrm{d}\psi_l}{\mathrm{d}\zeta} \tag{8-3-3}$$

证明留作习题。

值得特别指出的是，$\mathrm{h}_0^{(1)}(kr)$和$\mathrm{h}_0^{(2)}(kr)$分别代表发散的和会聚的球面波($\boldsymbol{k}$为从原点出发的波矢，r为场点到原点的距离)。这可由下面看出。

因为

$$\mathrm{h}_0^{(1)}(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\mathrm{H}_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}[\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(\zeta)+\mathrm{i}\mathrm{N}_{\frac{1}{2}}(\zeta)]$$

利用式(8-2-35)和式(8-2-37)，上式即

$$\mathrm{h}_0^{(1)}(\zeta)=\frac{1}{\zeta}(\sin\zeta-\mathrm{i}\cos\zeta)=-\frac{\mathrm{i}}{\zeta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta} \tag{8-3-4}$$

同理可得

$$\mathrm{h}_0^{(2)}(\zeta)=\frac{1}{\zeta}(\sin\zeta+\mathrm{i}\cos\zeta)=\frac{\mathrm{i}}{\zeta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta} \tag{8-3-5}$$

取$\zeta=kr$，则以上给出

$$\mathrm{h}_0^{(1)}(kr)=-\frac{\mathrm{i}}{kr}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr},\quad \mathrm{h}_0^{(2)}(kr)=\frac{\mathrm{i}}{kr}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} \tag{8-3-6}$$

它们一个代表由坐标原点发出的球面波，另一个则代表向原点会聚的球面波。

另外，由上面还可以知道，

$$\mathrm{j}_0(\zeta)=\frac{\sin\zeta}{\zeta} \tag{8-3-7}$$

故$\mathrm{j}_0(0)=1$。但对于$l>0$，由式(8-3-1)和式(8-2-4)有

$$\begin{aligned}\mathrm{j}_l(\zeta)&=\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma\left(k+l+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+l+\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma\left(k+l+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+l}\end{aligned} \tag{8-3-8}$$

因此当$\zeta\to0$时，$\mathrm{j}_l(\zeta)$将按ζ^l的规律趋近于0。

$\mathrm{n}_l(\zeta)$在$\zeta=0$处总是发散的。

8.4 贝塞尔方程的本征值问题

在贝塞尔方程(8-1-1)中，令$\zeta=\mu x$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\mu^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)u=0 \tag{8-4-1}$$

与式(4-4-3)对照，可知该方程属于斯特姆-刘维尔型方程，本征值为μ^2，权函数$\rho(x)=x$。因此，若$x\in[0,a]$，u满足边界条件

$$u(0)\text{有限},\quad u(a)=0 \tag{8-4-2}$$

或

$$u(0)\text{有限，}\ u'(a)=0 \tag{8-4-3}$$

则方程(8-4-1)与边界条件即构成本征值问题。

易于看出，对于边界条件式(8-4-2)，本征函数为

$$u_m(x)=\mathrm{J}_\nu(\mu_m^{(\nu)}x)\quad(m=1,2,\cdots) \tag{8-4-4}$$

本征值为 $\mu=\mu_m^{(\nu)}=\alpha_m^{(\nu)}/a$，$\alpha_m^{(\nu)}$ 为 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的第 m 个零点：$\mathrm{J}_\nu(\alpha_m^{(\nu)})=0$。

对于边界条件式(8-4-3)，本征函数则为

$$u_m(x)=\mathrm{J}_\nu(\tilde{\mu}_m^{(\nu)}x)\quad(m=1,2,\cdots) \tag{8-4-5}$$

本征值为 $\tilde{\mu}_m^{(\nu)}=\beta_m^{(\nu)}/a$，$\beta_m^{(\nu)}$ 为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_\nu(\mu x)$ 的第 m 个零点：

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_\nu(\mu x)\right]_{x=a}=[\mu \mathrm{J}'_\nu(z)]_{z=\beta_m^{(\nu)}}=0$$

若 $\tilde{\mu}_m^{(\nu)}\neq0$，则上式即 $[\mathrm{J}'_\nu(z)]_{z=\beta_m^{(\nu)}}=0$，或简写为 $\mathrm{J}'_\nu(\beta_m^{(\nu)})=0$。

在对斯特姆-刘维尔型本征值问题的讨论中，已经知道本征函数满足正交关系(4-4-8)。用于贝塞尔方程，因为权函数 $\rho(x)=x$，故有下面两个正交关系：

对边界条件式(8-4-2)，有

$$\int_0^a \mathrm{J}_\nu(\mu_{m'}^{(\nu)}x)\mathrm{J}_\nu(\mu_m^{(\nu)}x)x\mathrm{d}x=0\quad(\text{当 } m'\neq m) \tag{8-4-6}$$

对边界条件式(8-4-3)，有

$$\int_0^a \mathrm{J}_\nu(\tilde{\mu}_{m'}^{(\nu)}x)\mathrm{J}_\nu(\tilde{\mu}_m^{(\nu)}x)x\mathrm{d}x=0\quad(\text{当 } m'\neq m) \tag{8-4-7}$$

下面考虑 $m'=m$ 时的情况。以 μ 代表 $\mu_m^{(\nu)}$ 和 $\tilde{\mu}_m^{(\nu)}$，作变换 $\rho=\mu x$，则有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^a \mathrm{J}_\nu^2(\mu x)x\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu^2}\int_0^{\mu a}\mathrm{J}_\nu^2(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{2\mu^2}\left\{[\rho \mathrm{J}_\nu(\rho)]^2\Big|_0^{\mu a}-2\int_0^{\mu a}\rho^2\mathrm{J}_\nu(\rho)\mathrm{J}'_\nu(\rho)\mathrm{d}\rho\right\}\end{aligned} \tag{8-4-8}$$

因为 $\mathrm{J}_\nu(\mu x)$ 满足式(8-4-1)，故 $\mathrm{J}_\nu(\rho)$ 满足

$$\rho^2\mathrm{J}''_\nu(\rho)+\rho\mathrm{J}'_\nu(\rho)+(\rho^2-\nu^2)\mathrm{J}_\nu(\rho)=0$$

即有

$$\rho^2\mathrm{J}_\nu(\rho)=-\rho^2\mathrm{J}''_\nu(\rho)-\rho\mathrm{J}'_\nu(\rho)+\nu^2\mathrm{J}_\nu(\rho) \tag{8-4-9}$$

把式(8-4-9)代入式(8-4-8)的积分中，则有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\mu^2}\left\{[\mu a\mathrm{J}_\nu(\mu a)]^2+\int_0^{\mu a}\mathrm{d}[(\rho\mathrm{J}'_\nu(\rho)]^2-\nu^2\int_0^{\mu a}\mathrm{d}[\mathrm{J}_\nu(\rho)]^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{[a\mathrm{J}'_\nu(\mu a)]^2+\left[a^2-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right]\mathrm{J}_\nu^2(\mu a)\right\}\end{aligned} \tag{8-4-10}$$

上面最后一步已注意到 $\nu\neq0$ 时 $\mathrm{J}_\nu(0)=0$，故有 $\nu^2\mathrm{J}_\nu^2(0)=0$。

若边界条件为式(8-4-2)，即 $\mu=\mu_m^{(\nu)}$，$\mathrm{J}_\nu(\mu_m^{(\nu)}a)=\mathrm{J}_\nu(\alpha_m^{(\nu)})=0$，则式(8-4-10)给出

$$I=\frac{a^2}{2}[\mathrm{J}'_\nu(\alpha_m^{(\nu)})]^2$$

又由式(8-2-28)，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}(\zeta^{-\nu}\mathrm{J}_\nu)=-\zeta^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(\zeta)$$

以及 $J_\nu(\mu_m^{(\nu)}a)=J_\nu(\alpha_m^{(\nu)})=0$，可知 $J'_\nu(\alpha_m^{(\nu)})=-J_{\nu+1}(\alpha_m^{(\nu)})$，于是有

$$I=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\alpha_m^{(\nu)}) \tag{8-4-11}$$

若边界条件为式(8-4-3)，则式(8-4-10)中 $\mu_m^{(\nu)}$ 应改为 $\tilde{\mu}_m^{(\nu)}$，而 $J'_\nu(\tilde{\mu}_m^{(\nu)}a)=J'_\nu(\beta_m^{(\nu)})=0$，于是可得

$$I=\frac{a^2}{2}\left[1-\left(\frac{\nu}{\beta_m^{(\nu)}}\right)^2\right]J_\nu^2(\beta_m^{(\nu)}) \tag{8-4-12}$$

综合式(8-4-6)、式(8-4-7)和式(8-4-11)、式(8-4-12)，得到正交关系如下：
若边界条件为式(8-4-2)，则

$$\int_0^a J_\nu(\mu_{m'}^{(\nu)}x)J_\nu(\mu_m^{(\nu)}x)x\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(\alpha_m^{(\nu)})\right]^2\delta_{m'm} \tag{8-4-13}$$

若边界条件为式(8-4-3)，则

$$\int_0^a J_\nu(\tilde{\mu}_{m'}^{(\nu)}x)J_\nu(\tilde{\mu}_m^{(\nu)}x)x\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\left[1-\left(\frac{\nu}{\beta_m^{(\nu)}}\right)^2\right]J_\nu^2(\beta_m^{(\nu)})\delta_{m'm} \tag{8-4-14}$$

8.5 贝塞尔函数的生成函数与积分表示

本节所说的贝塞尔函数 $J_l(\zeta)$ 皆指整数阶而言。

8.5.1 生成函数

$J_l(\zeta)$ 的生成函数是 $e^{\frac{\zeta}{2}(s-\frac{1}{s})}$，即

$$e^{\frac{\zeta}{2}(s-\frac{1}{s})}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(\zeta)s^l \tag{8-5-1}$$

证 将函数 $e^{\frac{\zeta s}{2}}$ 和 $e^{-\frac{\zeta}{2s}}$ 在 $s=0$ 附近展开为罗兰(Laurant)级数，然后相乘，得

$$e^{\frac{\zeta}{2}(s-\frac{1}{s})}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{m!n!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{m+n}s^{m-n}$$

上式右边 s 的指数 $m-n$ 有正有负。注意到对 m 和 n 的求和可以交换顺序，则上式可以分解为两部分，即

$$e^{\frac{\zeta}{2}(s-\frac{1}{s})}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\right\}\frac{(-)^n}{m!n!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{m+n}s^{m-n}$$

其中第一部分对应于 $m-n\geqslant0$，先对 m 求和；第二部分对应于 $m-n<0$，先对 n 求和。记 $l=m-n$，则上式可写为

$$e^{\frac{\zeta}{2}(s-\frac{1}{s})}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(l+n)!n!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{l+2n}s^l+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-1}^{-\infty}\frac{(-)^{m-l}}{m!(m-l)!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-l+2m}s^l$$

交换对 l 和对 n、m 的求和顺序，则由 J_ν 的级数表达式(8-2-4)可知，上式即

$$e^{\frac{\zeta}{2}(s-\frac{1}{s})}=\sum_{l=0}^{\infty}J_l(\zeta)s^l+(-)^l\sum_{l=-1}^{-\infty}J_{-l}(\zeta)s^l=\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(\zeta)s^l$$

上面最后一步利用了 $J_{-l}(\zeta)=(-)^lJ_l(\zeta)$。式(8-5-1)得证。

在生成函数中令 $s=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，可以导出下面两个公式：

$$\int_0^{2\pi}\cos l\varphi'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cos(\varphi-\varphi')}\mathrm{d}\varphi'=(-\mathrm{i})^l 2\pi\cos l\varphi\,\mathrm{J}_l(x) \tag{8-5-2}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin l\varphi'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cos(\varphi-\varphi')}\mathrm{d}\varphi'=(-\mathrm{i})^l 2\pi\sin l\varphi\,\mathrm{J}_l(x) \tag{8-5-3}$$

证明留作习题。在式(8-5-2)中令 $l=0,\varphi'-\varphi=\theta$，可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{J}_0(kr) \tag{8-5-4}$$

这是一个常用的积分公式。

8.5.2　平面波展开式

在 6.5 节中曾经把平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$ 用勒让德多项式和球贝塞尔函数表示为无穷级数〔见式(6-5-40)〕，现在要将平面波写成用 $\mathrm{J}_l(kr)$ 和 $\cos l\theta$ 表示的级数，方法是利用 $\mathrm{J}_l(\zeta)$ 的生成函数。

在式(8-5-1)中令 $\zeta=kr,s=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则式(8-5-1)成为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_l(\zeta)\mathrm{i}^l\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\theta}$$

利用 $\mathrm{J}_{-l}(\zeta)=(-)^l\mathrm{J}_l(\zeta)$ 和 $(-)^l\mathrm{i}^{-l}=\mathrm{i}^l$，上式可写为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{J}_l(kr)\mathrm{i}^l\cos l\theta \tag{8-5-5}$$

这就是平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$ 用 $\mathrm{J}_l(kr)$ 和 $\cos l\theta$ 表示的级数形式。

顺便指出，将式(8-5-5)两边对 θ 积分，亦可得积分公式(8-5-4)。

8.5.3　$\mathrm{J}_l(\zeta)$的积分表示

$\mathrm{J}_l(\zeta)$ 可以表示为下面的路径积分：

$$\mathrm{J}_l(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_W \mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t \tag{8-5-6}$$

其中路径 W 如图 8-5-1 所示。

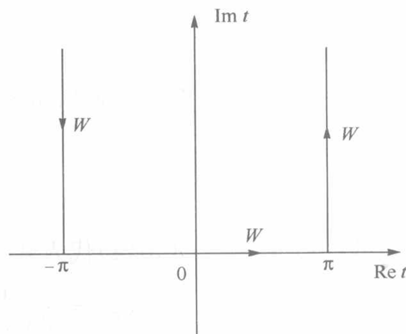


图 8-5-1　积分路径 W

证　式(8-5-6)右边的积分可分解为三段：

$$\int_W \mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t=\int_{-\pi+\mathrm{i}\infty}^{-\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}+\int_{\pi}^{\pi+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t$$

容易看出，右边第一个积分中作代换 $t\to t'=t+2\pi$ 后即与第三个积分相抵消。再对第二个积分作代换 $t\to -t$，上式即成为

$$\int_W \mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lt+\mathrm{i}\zeta\sin t}\mathrm{d}t \tag{8-5-7}$$

于是式(8-5-6)成为

$$\mathrm{J}_l(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lt+\mathrm{i}\zeta\sin t}\mathrm{d}t \tag{8-5-8}$$

另一方面，在生成函数式(8-5-1)中令 $s=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta\sin t}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_l(\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}lt}$$

可见 $\mathrm{J}_l(\zeta)$ 是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta\sin t}$ 关于函数族 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}lt}\}$ 的傅里叶(Fourier)展式的系数，而反演公式正是式(8-5-8)。由此，式(8-5-6)得证。

式(8-5-8)是一个常用的公式，它常被写为

$$\mathrm{J}_l(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\zeta\sin\theta-l\theta)}\mathrm{d}\theta \tag{8-5-9}$$

又因为 $\sin(\zeta\sin\theta-l\theta)$ 是 θ 的奇函数，故上式还可写为

$$\mathrm{J}_l(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\zeta\sin\theta-l\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8-5-10}$$

8.5.4 汉克尔函数的积分表示

利用 $\mathrm{J}_l(\zeta)$ 的积分表示，可以得到汉克尔函数的积分表示：

$$\mathrm{H}_l^{(1)}(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{W_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t \tag{8-5-11}$$

$$\mathrm{H}_l^{(2)}(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{W_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t \tag{8-5-12}$$

路径 W_1 和 W_2 如图 8-5-2 所示。下面给出证明。

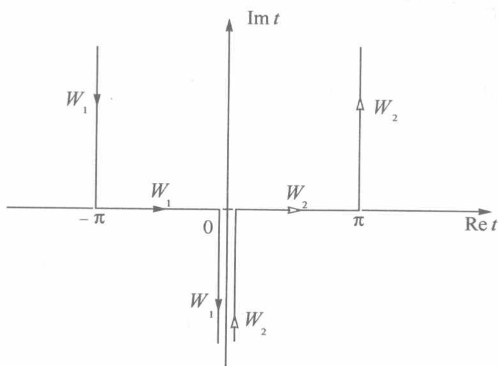


图 8-5-2 积分路径 W_1 和 W_2

首先，由式(8-2-21)和式(8-2-16)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_l^{(1)}(\zeta)&=\mathrm{J}_l(\zeta)+\mathrm{i}\mathrm{N}_l(\zeta)\\&=\mathrm{J}_l(\zeta)+\mathrm{i}\frac{\mathrm{J}_l(\zeta)\cos l\pi-\mathrm{J}_{-l}(\zeta)}{\sin l\pi}\\&=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\pi}\mathrm{J}_l(\zeta)-\mathrm{J}_{-l}(\zeta)}{\sin l\pi}\end{aligned} \tag{8-5-13}$$

在 $\mathrm{J}_l(\zeta)$ 的积分表达式(8-5-6)中将 l 改为 $-l$，有

$$\mathrm{J}_{-l}(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_W\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t$$

对此作变换 $s=-t-\pi$，然后将 s 写为 t，则路径 W 演化为 V，如图 8-5-3 所示。于是，上式成为

$$\mathrm{J}_{-l}(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\pi}\int_V\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t \tag{8-5-14}$$

将式(8-5-6)和式(8-5-14)代入式(8-5-13)，有

$$\mathrm{H}_l^{(1)}(\zeta)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi\sin l\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\pi}\int_W\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\pi}\int_V\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t\right]$$

注意到 $W=W_1+W_2$，$V=-W_1+W_2'$（$-W_1$ 表示与 W_1 反方向），如图 8-5-4 所示，则上式可写为

$$\mathrm{H}_l^{(1)}(\zeta)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi\sin l\pi}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\pi}\left[\int_{W_1}+\int_{W_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t\right]+\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\pi}\left[\int_{-W_1}+\int_{W_2'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lt-\zeta\sin t)}\mathrm{d}t\right]\right\} \tag{8-5-15}$$

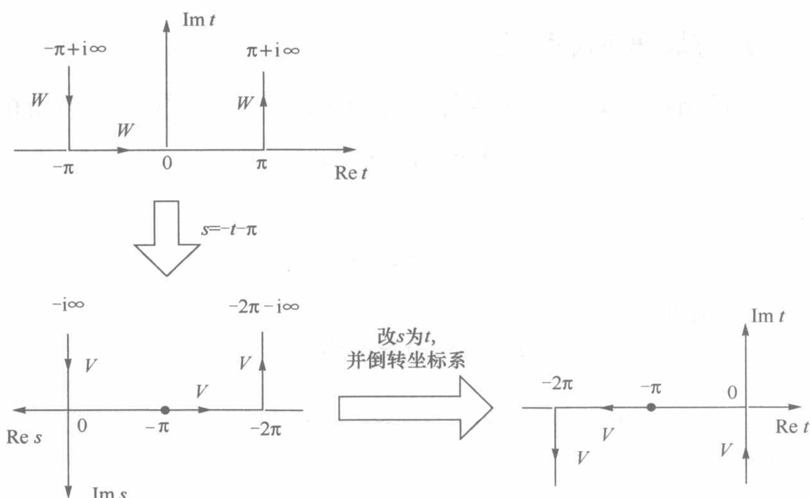


图 8-5-3　路径 W 演化为路径 V

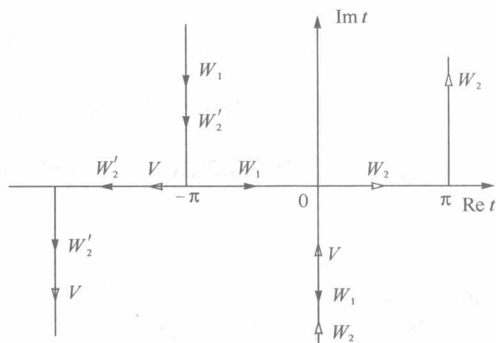


图 8-5-4　路径 W、V 与 W_1、W_2

对式中第四个积分做变换 $t'=t+2\pi$，则 W_2' 成为 $-W_2$，而被积函数则成为 $e^{-i2l\pi}e^{i(lt-\zeta\sin t)}$，故其与第二个积分相互抵消。又因为第一和第三个积分等值反号，于是有

$$H_l^{(1)}(\zeta)=\frac{i}{2\pi\sin l\pi}(e^{-il\pi}-e^{il\pi})\int_{W_1}e^{i(lt-\zeta\sin t)}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{W_1}e^{i(lt-\zeta\sin t)}dt$$

式(8-5-11)得证。

由式(8-2-21)和式(8-2-22)可得 $H_l^{(2)}(\zeta)=2J_l(\zeta)-H_l^{(1)}(\zeta)$。把式(8-5-6)和式(8-5-11)代入，则有

$$H_l^{(2)}(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{W}e^{i(lt-\zeta\sin t)}dt-\frac{1}{\pi}\int_{W_1}e^{i(lt-\zeta\sin t)}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{W-W_1}e^{i(lt-\zeta\sin t)}dt$$

因为 $W-W_1=W_2$，故上式即(8-5-12)。

本节 3、4 两部分所介绍的积分表达式统称为索末菲(Sommerfeld)积分。

8.6　汉克尔函数的大宗量近似

本节介绍如何用鞍点法求汉克尔函数的大宗量近似表达式。鞍点法是一种重要的近似分析方法，在理论分析中常被应用。

8.6.1 鞍点与最速下降路径

考虑复平面中的函数 $f(z)$。设在某点 z_0，有 $f'(z_0)=0$，但 $f''(z_0)\neq 0$，则在 z_0 附近，有

$$f(z)=f(z_0)+\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2+\cdots \tag{8-6-1}$$

记

$$\frac{1}{2}f''(z_0)=r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},\quad z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{8-6-2}$$

r 和 r_0 皆为绝对值，则有

$$f(z)-f(z_0)\approx r_0r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\alpha)} \tag{8-6-3}$$

于是

$$\mathrm{Re}\,f(z)-\mathrm{Re}f(z_0)\approx r_0r^2\cos(2\theta+\alpha) \tag{8-6-4}$$

这样，在 z_0 附近就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\mathrm{Re}\,f(z)]=2r_0r\cos(2\theta+\alpha) \tag{8-6-5}$$

这表明，当从 z_0 点离开时，函数 $\mathrm{Re}\,f(z)$ 上升（导数>0）和下降（导数<0）的情况因离开的方向角 θ 而异。在 $\theta=-\frac{\alpha}{2}$ 和 $\pi-\frac{\alpha}{2}$ 的方向上升最快，而在 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ 的方向下降最快。情况如图 8-6-1 所示。图中上升区和下降区的分界线对应于 $\theta=\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$。函数 $\mathrm{Re}\,f(z)$ 在 z_0 附近的图像形似马鞍，如图 8-6-2 所示，故称 z_0 为鞍点。

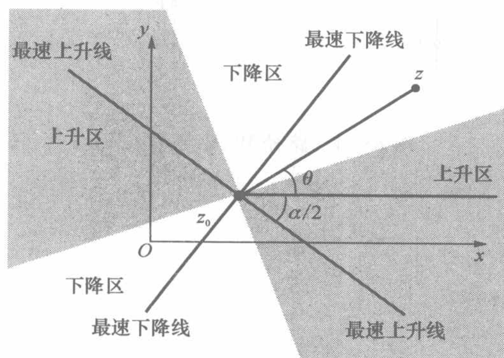


图 8-6-1　最速上升线与最速下降线

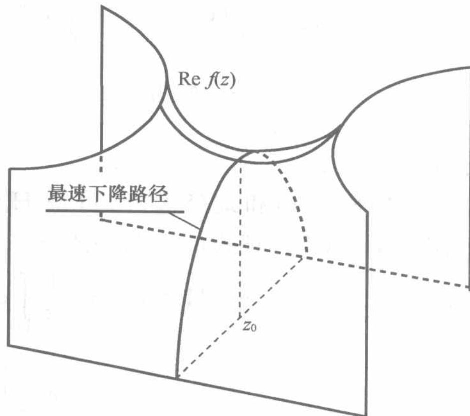


图 8-6-2　鞍点

总之，满足 $f'(z_0)=0$，但 $f''(z_0)\neq 0$ 的点 z_0 为鞍点；经过鞍点，且满足

$$\theta=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

的路径为最速下降路径〔$\alpha=\arg f''(z_0)$〕。

在鞍点附近，对于最速下降路径上的点 z，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2&\approx f(z)-f(z_0)\\&\approx r_0r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\alpha)}\big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}\\&=-r_0r^2\end{aligned} \tag{8-6-6}$$

这是一个负实数。

8.6.2 鞍点法的近似公式

考虑积分

$$I(\lambda)=\int_C g(z)\mathrm{e}^{\lambda f(z)}\mathrm{d}z \tag{8-6-7}$$

其中 C 为复平面中的任一路径，λ 为一很大的正实数，$f(z)$、$g(z)$ 皆解析。若在 C 的两端点，$\mathrm{Re}f(z)\to-\infty$，则积分必收敛。又因被积函数解析，故保持 C 的两端点不动，而将 C 连续变形，积分结果不变。

因此，若使变形后的路径沿最速下降路径经过鞍点，则因为鞍点两侧被积函数值迅速减小，可知对积分的主要贡献来自鞍点附近。因此可用鞍点 z_0 附近沿一段最速下降路径的积分作为原积分的近似结果。这就是用鞍点法近似求积分的基本思想。

因为 $f'(z_0)=0$，故在 z_0 附近有

$$f(z)=f(z_0)+\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2+\cdots \tag{8-6-8}$$

忽略 $z-z_0$ 的高阶项，则有

$$\mathrm{e}^{\lambda f(z)}\approx\mathrm{e}^{\lambda f(z_0)}\exp\left[\frac{\lambda}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2\right] \tag{8-6-9}$$

因为沿最速下降路径，$\frac{\lambda}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2<0$，而 λ 很大，故 $\mathrm{e}^{\lambda f(z)}$ 在离开 z_0 时便很快下降。

如果 $g(z)$ 在 $z=z_0$ 附近变化缓慢，则在 $\mathrm{e}^{\lambda f(z)}$ 显著不为 0 的区域中有

$$\mathrm{e}^{\lambda f(z)}g(z)\approx\mathrm{e}^{\lambda f(z_0)}g(z_0)\exp\left[\frac{\lambda}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2\right] \tag{8-6-10}$$

于是就得到了近似式：

$$I(\lambda)\approx\mathrm{e}^{\lambda f(z_0)}g(z_0)\int_{z_1}^{z_2}\exp\left[\frac{\lambda}{2}f''(z_0)\ (z-z_0)^2\right]\mathrm{d}z \tag{8-6-11}$$

这里 (z_1,z_2) 为 $\mathrm{e}^{\lambda f(z)}$ 显著不为 0 的区间。

因为被积函数为具有很大负幂次的指数，故在 (z_1,z_2) 区间外，上式中的被积函数很快趋于零，因此积分限可放宽为 $(-\infty,\infty)$。把式(8-6-2)代入上式的积分中，并利用 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\lambda}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2\right]\mathrm{d}z&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\lambda r_0 r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\alpha)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}r\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\lambda r_0 r^2)\mathrm{d}r\end{aligned}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\lambda r_0 r^2)\mathrm{d}r=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda r_0}}$$

而 $r_0=\frac{1}{2}|f''(z_0)|$，故得

$$I(\lambda)\approx e^{\lambda f(z_0)}g(z_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\,|f''(z_0)|}}e^{i\theta} \tag{8-6-12}$$

此即鞍点法的近似公式，其中$\theta=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$为最速下降路径经过$z_0$时与实轴的夹角，±号的选择应保证最速下降路径与原路径大方向一致。

8.6.3 $H_l^{(1)}(x)$的大宗量近似式

下面用鞍点法导出$H_l^{(1)}(x)$的大宗量近似式。

式(8-5-11)已给出了$H_l^{(1)}(x)$的积分表达式：

$$H_l^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{W_1}e^{il\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta$$

路径W_1如图8-6-3所示，$\zeta=\xi+i\eta$。与式(8-6-7)对照，可知

$$f(\zeta)=i\left(\frac{l}{x}\zeta-\sin\zeta\right)$$

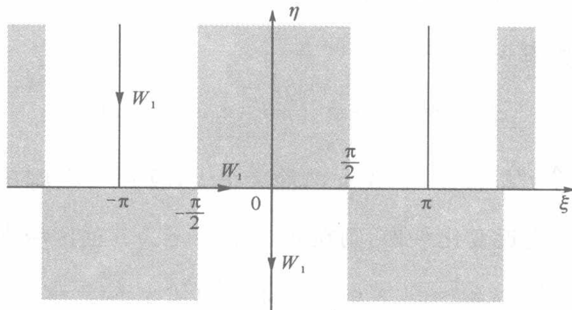


图8-6-3 积分路径W_1

$g(\zeta)=1$。在x很大时，有

$$f'(\zeta)=i\left(\frac{l}{x}-\cos\zeta\right)\approx-i\cos\zeta$$

令$f'(\zeta)=0$，得$\zeta_0=\pm\frac{\pi}{2}$。分析可知只能取$\zeta_0=-\frac{\pi}{2}$(详见后面的说明)。于是有

$$f''(\zeta_0)=i\sin\zeta_0=-i$$

故$\alpha=\arg[f''(z_0)]=-\frac{\pi}{2}$，从而$\theta=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$。

因为$\theta=-\frac{3\pi}{4}$不满足$|\theta|<\pi/2$，故不取。又因为$xf(\zeta_0)=i\left(-l\frac{\pi}{2}+x\right)$，故按式(8-6-12)即有

$$H_l^{(1)}(x)\approx\frac{1}{\pi}e^{i(x-l\frac{\pi}{2})}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left[x-\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}\quad(x\gg1) \tag{8-6-13}$$

此即当$x\gg1$时$H_l^{(1)}(x)$的近似式。

现在说明为什么不能取 $\zeta_0=\frac{\pi}{2}$。

考虑 $xf(\zeta)=\mathrm{i}l\zeta-\mathrm{i}x\sin\zeta$。利用 $\cos\mathrm{i}\eta=\mathrm{ch}\,\eta$，$\sin\mathrm{i}\eta=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,\eta$，有

$$\sin\zeta=\sin(\xi+\mathrm{i}\eta)=\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta+\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,\eta\cos\xi$$

因此

$$\mathrm{Re}[xf(\zeta)]=-l\eta+x\,\mathrm{sh}\,\eta\cos\xi$$

为保证积分收敛，要求 $\mathrm{Re}[xf(\zeta)]$ 恒小于 0；又因为 $x\gg1$，上式中起主要作用的是第二项，因此积分路径应满足 $\mathrm{sh}\eta$ 与 $\cos\xi$ 反号。图 8-6-3 中的阴影区域不满足这一条件，例如在上半平面，$\eta>0$，$\mathrm{sh}\eta>0$，而在 $-\frac{\pi}{2}<\xi<\frac{\pi}{2}$ 区域中，$\cos\xi>0$，故在中央的阴影区域中，$\mathrm{sh}\,\eta\cos\xi>0$。所以路径不能经过 $\zeta=\frac{\pi}{2}$。

用鞍点法也可类似地求得 $\mathrm{H}_l^{(2)}(x)$ 大宗量近似式：

$$\mathrm{H}_l^{(2)}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[x-\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}\quad(x\gg1)\tag{8-6-14}$$

8.7 变型贝塞尔方程与变型贝塞尔函数

8.7.1 方程形式

在贝塞尔方程(8-1-1)中把 ζ 改为 $\mathrm{i}\zeta$，得方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}-\left(1+\frac{\nu^2}{\zeta^2}\right)u=0\tag{8-7-1}$$

此即变型的贝塞尔方程，方程的解称变型的贝塞尔函数(Modified Bessel function)。

显然，方程的解可由贝塞尔方程的解作同样的变换而得到，故又称此解为虚宗量贝塞尔函数。方程的两个线性无关解可表示为第一类和第二类变型贝塞尔函数。

8.7.2 第一类变型贝塞尔函数

因为 $\mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}\zeta)$ 等一般为复数，而我们希望能得到实函数，故定义第一类变型贝塞尔函数如下：

$$\mathrm{I}_\nu(\zeta)=\mathrm{i}^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}\zeta)\tag{8-7-2}$$

把 $\mathrm{J}_\nu(\zeta)$ 的级数表式(8-2-4)代入，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_\nu(\zeta)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{-\nu}(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\mathrm{i}\zeta}{2}\right)^{2k+\nu}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+\nu}\end{aligned}\tag{8-7-3}$$

可以看出，当 ζ 为实数时，$\mathrm{I}_\nu(\zeta)$ 为实函数，而且对于 $\nu=l=0,1,2,\cdots$，有

$$\mathrm{I}_l(0)=\begin{cases}1&(l=0)\\0&(l\neq0)\end{cases}\tag{8-7-4}$$

由式(8-7-2)和 $\mathrm{J}_{-l}(\zeta)=(-)^l\mathrm{J}_l(\zeta)$，可得

$$\mathrm{I}_{-l}(\zeta)=\mathrm{I}_l(\zeta)\tag{8-7-5}$$

8.7.3 第二类变型贝塞尔函数

第二类变型贝塞尔函数定义为

$$K_\nu(\zeta)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(\zeta)-I_\nu(\zeta)}{\sin\nu\pi} \tag{8-7-6}$$

它是方程(8-7-1)的与 $I_\nu(\zeta)$线性无关的第二解。由式(8-7-6)可知

$$K_{-\nu}(\zeta)=K_\nu(\zeta) \tag{8-7-7}$$

$K_\nu(\zeta)$与汉克尔函数有简单的关系。利用

$$I_\nu(\zeta)=i^{-\nu}J_\nu(i\zeta),\quad I_{-\nu}(\zeta)=i^\nu J_{-\nu}(i\zeta)$$

有

$$K_\nu(\zeta)=\frac{\pi}{2}\frac{i^\nu J_{-\nu}(i\zeta)-i^{-\nu}J_\nu(i\zeta)}{\sin\nu\pi}=-i^\nu\ \frac{\pi}{2}\frac{i^{-2\nu}J_\nu(i\zeta)-J_{-\nu}(i\zeta)}{\sin\nu\pi}$$

注意到

$$i^{-2\nu}=e^{-i\nu\pi}=\cos\nu\pi-i\sin\nu\pi$$

则由上式可得

$$\begin{aligned}K_\nu(\zeta)&=-i^\nu\ \frac{\pi}{2}\frac{(\cos\nu\pi-i\sin\nu\pi)J_\nu(i\zeta)-J_{-\nu}(i\zeta)}{\sin\nu\pi}\\&=-i^\nu\ \frac{\pi}{2}\left[-iJ_\nu(i\zeta)+\frac{\cos\nu\pi J_\nu(i\zeta)-J_{-\nu}(i\zeta)}{\sin\nu\pi}\right]\\&=i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}[J_\nu(i\zeta)+iN_\nu(i\zeta)]\end{aligned}$$

根据 $H_\nu^{(1)}(\zeta)$的定义,上式即

$$K_\nu(\zeta)=i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(1)}(i\zeta) \tag{8-7-8}$$

此式亦可作为 $K_\nu(\zeta)$的定义。

在式(8-7-8)中把 ζ 改为 $-i\zeta$ 和 $i\zeta$,又可得到

$$K_\nu(-i\zeta)=i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(1)}(\zeta) \tag{8-7-9}$$

$$K_\nu(i\zeta)=i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(1)}(-\zeta) \tag{8-7-10}$$

利用式(8-2-23),即 $H_\nu^{(1)}(e^{i\pi}\zeta)=-e^{i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(\zeta)$,式(8-7-10)又可写为

$$K_\nu(i\zeta)=(-i)^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(2)}(\zeta) \tag{8-7-11}$$

当 $\nu=l=0,1,2,\cdots$ 时,由式(8-7-8),并利用 $N_l(i\zeta)$的级数形式(8-2-9),以及 $J_l(i\zeta)$与 $I_l(\zeta)$的关系,可得

$$\begin{aligned}K_l(\zeta)=&-I_l(\zeta)\ln\frac{\zeta}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{l-1}\frac{(-)^n(l-n-1)!}{n!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n-l}+\\&\frac{(-)^l}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(l+n)!}[\psi(l+n+1)+\psi(n+1)]\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n+l}\end{aligned} \tag{8-7-12}$$

对 $l=0$,去掉第二项。

由式(8-7-12)不难看出,$\zeta=0$ 是 $K_l(\zeta)$的奇点。并且,在 $\zeta\sim0$ 处,

$$K_0(\zeta)\sim-\ln\frac{\zeta}{2} \tag{8-7-13}$$

$$K_l(\zeta)\sim(l-1)!\ \frac{2^{l-1}}{\zeta^l}(l\geqslant1) \tag{8-7-14}$$

图 8-7-1 给出了几个整数阶变型贝塞尔函数的曲线。由图可知,$I_l(\zeta)$在 $\zeta=0$ 有限,在$\zeta\to\infty$发散,而 $K_\nu(\zeta)$情况则正好相反(在 $\zeta\to\infty$为 0)。

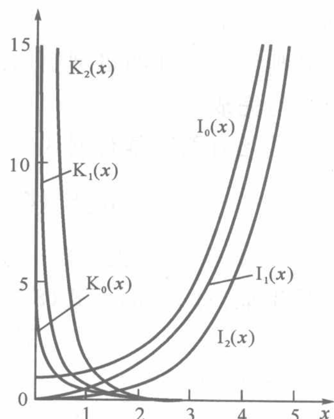


图 8-7-1 变型贝塞尔函数曲线

8.7.4 递推关系和朗斯基行列式

由 $J_\nu(\zeta)$和 $H_\nu^{(1)}(\zeta)$的递推关系,可导出 $I_\nu(\zeta)$和 $K_\nu(\zeta)$的递推关系。下面是几个常用的关系:

$$I'_\nu(\zeta)=\frac{1}{2}[I_{\nu+1}(\zeta)+I_{\nu-1}(\zeta)] \tag{8-7-15}$$

$$K'_\nu(\zeta)=-\frac{1}{2}[K_{\nu+1}(\zeta)+K_{\nu-1}(\zeta)] \tag{8-7-16}$$

$$I_\nu(\zeta)=\frac{\zeta}{2\nu}[I_{\nu-1}(\zeta)-I_{\nu+1}(\zeta)] \tag{8-7-17}$$

$$K_\nu(\zeta)=-\frac{\zeta}{2\nu}[K_{\nu-1}(\zeta)-K_{\nu+1}(\zeta)] \tag{8-7-18}$$

例如,由式(8-2-31),即

$$J'_\nu(\zeta)=\frac{1}{2}[J_{\nu-1}(\zeta)-J_{\nu+1}(\zeta)]$$

有

$$I'_\nu(\zeta)=i^{-\nu}iJ'_\nu(z)_{z=i\zeta}=i^{-(\nu-1)}\frac{1}{2}[J_{\nu-1}(i\zeta)-J_{\nu+1}(i\zeta)]$$

$$=\frac{1}{2}[i^{-(\nu-1)}J_{\nu-1}(i\zeta)+i^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(i\zeta)]=\frac{1}{2}[I_{\nu-1}(\zeta)+I_{\nu+1}(\zeta)]$$

此即式(8-7-15)。

类似地,由式(8-2-32),即

$$2\,\frac{\nu}{\zeta}J_\nu=J_{\nu+1}(\zeta)+J_{\nu-1}(\zeta)$$

有

$$I_\nu(\zeta)=i^{-\nu}J_\nu(i\zeta)=i^{-\nu}\frac{i\zeta}{2\nu}[J_{\nu+1}(i\zeta)+J_{\nu-1}(i\zeta)]$$

$$=\frac{\zeta}{2\nu}[-i^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(i\zeta)+i^{-(\nu-1)}J_{\nu-1}(i\zeta)]$$

$$=\frac{\zeta}{2\nu}[I_{\nu-1}(\zeta)-I_{\nu+1}(\zeta)]$$

此即式(8-7-17)。

其他两式的证明可利用 $K_\nu(\zeta)$ 与 $I_\nu(\zeta)$ 之间的关系，由式(8-7-15)和式(8-7-17)导出。读者可自行完成。

此外还有朗斯基行列式：

$$W[K_\nu(\zeta),I_\nu(\zeta)]=K_\nu(\zeta)I'_\nu(\zeta)-K'_\nu(\zeta)I_\nu(\zeta)=\frac{1}{\zeta} \tag{8-7-19}$$

只要利用式(8-7-8)和式(8-7-2)即可证明此式，留作习题。

特别地，对 $\nu=0$，由式(8-7-15)和式(8-7-16)，有

$$I'_0(\zeta)=I_1(\zeta),\quad K'_0(\zeta)=-K_1(\zeta) \tag{8-7-20}$$

代入式(8-7-19)，得

$$K_0(\zeta)I_1(\zeta)+K_1(\zeta)I_0(\zeta)=\frac{1}{\zeta} \tag{8-7-21}$$

8.7.5 大宗量近似式

由 $K_\nu(\zeta)$ 与 $H_\nu^{(1)}(\zeta)$ 的关系式(8-7-8)和 $H_\nu^{(1)}(\zeta)$ 的大宗量近似式(8-2-24)，注意到 $e^{-i(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}=i^{-(\nu+\frac{1}{2})}$，可以写出

$$K_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\quad(x\gg1) \tag{8-7-22}$$

类似地，由 $I_\nu(\zeta)$ 与 $J_\nu(\zeta)$ 的关系式(8-7-2)和 $J_\nu(\zeta)$ 的大宗量近似式(8-2-19)，注意到 e^{-x} 相比于 e^x 可以忽略，则可写出

$$I_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^{x}\quad(x\gg1) \tag{8-7-23}$$

在要求更高精度的情况下，式(8-7-22)和式(8-7-23)应改为

$$K_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left(1+\frac{4\nu^2-1}{8x}\right) \tag{8-7-24}$$

$$I_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^{x}\left(1-\frac{4\nu^2-1}{8x}\right) \tag{8-7-25}$$

8.7.6 贝塞尔方程在阶跃光纤中的应用

阶跃光纤是纤芯和包层的折射率分别为常数的光纤。由式(7-5-5)可知，在圆柱坐标系中将有方程

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\mu^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{8-7-26}$$

其中 m 为整数，$\mu=\sqrt{k^2n^2-\beta^2}$，$k=\omega/c$。令 $\rho=\zeta/\mu$，则方程成为 m 阶的贝塞尔方程：

$$\frac{d^2R}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{dR}{d\zeta}+\left(1-\frac{m^2}{\zeta^2}\right)R=0 \tag{8-7-27}$$

导行波是集中在轴线附近有限区间内沿轴向传播的波。因为纤芯半径有限，故在纤芯内部($n=n_1$)，波场沿径向的分布应是驻波。而有限形式的驻波解就是 $J_m(\mu\rho)$，故知纤芯内部的解应为 $R(\rho)\sim J_m(\mu\rho)$。

现在考虑包层($n=n_2$)中的方程。由于导行波的光场一般集中于纤芯内外的有限区域中,故分析中可以假定包层无限厚。注意到 $\mathrm{J}_m(\mu\rho)$ 和 $\mathrm{N}_m(\mu\rho)$ 都是沿径向的驻波,而包层的外边界在无限远,其中不应存在径向驻波,故知 $\mathrm{J}_m(\mu\rho)$ 和 $\mathrm{N}_m(\mu\rho)$ 都不适用于包层。但若作变换 $\tilde{\mu}=\mathrm{i}\mu=\sqrt{\beta^2-k^2n^2}$,则方程(8-7-26)可变换为变型的贝塞尔方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\zeta}-\left(1+\frac{m^2}{\zeta^2}\right)R=0 \tag{8-7-28}$$

由于导行波无径向辐射,故包层中的场应随 ρ 的增大而趋于 0,因此应取 $R(\rho)\sim\mathrm{K}_m(\tilde{\mu}\rho)$。

由于 μ、$\tilde{\mu}$ 皆应为实数,故又要求 $kn_2\leqslant\beta\leqslant kn_1$。当 $\beta<kn_2$ 时,$\tilde{\mu}$ 成为虚数:$\tilde{\mu}=\pm\mathrm{i}w$,$w=\sqrt{k^2n_2^2-\beta^2}$ 为实数。按式(8-7-9)～式(8-7-11),此时方程(8-7-28)的解成为 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(w\rho)$ 或 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(w\rho)$,这是沿径向的辐射波。对于导行波而言,这就是截止状态。

8.8 索末菲球面波公式

在电磁场分析中,有时需要用到球面波在圆柱坐标系中的表达式,这就是索末菲(Sommerfeld)球面波公式。本节将从能量守恒这一物理概念出发,导出此表达式。

8.8.1 波的能量守恒方程

无损耗介质中的波动方程为

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{v^2}\ddot{\phi}=0 \tag{8-8-1}$$

其中 v 为波速,上边的"·"表示$\partial/\partial t$,t 代表时间。由式(8-8-1)可写出

$$\dot{\phi}^*\nabla^2\phi-\frac{1}{v^2}\dot{\phi}^*\ddot{\phi}=0,\quad \dot{\phi}\,\nabla^2\phi^*-\frac{1}{v^2}\dot{\phi}\ddot{\phi}^*=0$$

两式相加,得

$$\dot{\phi}^*\nabla^2\phi+\dot{\phi}\,\nabla^2\phi^*=\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\phi}|^2$$

该式又可写为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|\nabla\phi|^2+\frac{1}{v^2}|\dot{\phi}|^2\right)-\nabla\cdot[\mathrm{Re}(\dot{\phi}^*\nabla\phi)]=0 \tag{8-8-2}$$

记

$$e=\frac{1}{2}\left(|\nabla\phi|^2+\frac{1}{v^2}|\dot{\phi}|^2\right),\quad \boldsymbol{j}=-\mathrm{Re}(\dot{\phi}^*\nabla\phi) \tag{8-8-3}$$

则式(8-8-2)成为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{8-8-4}$$

该式为守恒方程。若令 e 代表能量密度,则 $\boldsymbol{j}$ 就代表能流密度,式(8-8-4)就是能量守恒方程。

8.8.2 点源发出的功率

设无限大均匀介质中有一个角频率为 ω 的点源。以点源为原点,则波函数显然具有球

对称性，可表示为 $\phi(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$。于是由波动方程可导出

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}+k^2\phi=0\quad\left(k=\frac{\omega}{v}\right)\tag{8-8-5}$$

此方程的外行波解为

$$\phi=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\tag{8-8-6}$$

由式(8-8-3)知，此波的能流密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}&=-\mathrm{Re}\left(\dot{\phi}^*\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_r=-\mathrm{Re}\left[\mathrm{i}\omega\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\left(-\frac{1}{r}+\mathrm{i}k\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right]\boldsymbol{e}_r\\&=\frac{k\omega}{r^2}\boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{e}_r$ 为沿球径方向的单位矢。以原点为心，取任一球面，对上式作积分，即得该点源的辐射功率：

$$P=\oiint\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi\omega k\tag{8-8-7}$$

8.8.3 柱坐标系中球面波方程的积分解

在柱坐标系(ρ,φ,z)中，位于原点的点源激发的场关于 z 轴对称，即有$\partial/\partial\varphi=0$。将 ϕ 写为傅里叶积分：

$$\phi(\rho,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\phi}(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qz}\mathrm{d}q\tag{8-8-8}$$

可知 $\tilde{\phi}(\rho)$在原点以外满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\phi}}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\tilde{\phi}}{\mathrm{d}\rho}-(q^2-k^2)\tilde{\phi}=0\tag{8-8-9}$$

记 $\mu^2=q^2-k^2$，并作变换 $\rho=\rho'/\mu$，式(8-8-5)成为 0 阶变型贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\phi}}{\mathrm{d}\rho'^2}+\frac{1}{\rho'}\frac{\mathrm{d}\tilde{\phi}}{\mathrm{d}\rho'}-\tilde{\phi}=0\tag{8-8-10}$$

该方程在 $\rho\to\infty$收敛的解为

$$\tilde{\phi}(\rho)=C\mathrm{K}_0(\mu\rho)$$

C 为待定常数。把 $\tilde{\phi}(\rho)$代入式(8-8-8)，得

$$\phi(\rho,z)=C\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_0(\mu\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qz}\mathrm{d}q\tag{8-8-11}$$

因为 $\mu=(q^2-k^2)^{1/2}$为双值函数，故须考虑积分路径。考虑的依据是要求积分给出外行波，并且满足能量可积，即在 $\rho\to\infty$处 $\phi\to0$。

根据大宗量近似式(8-7-22)，有

$$\mathrm{K}_0(\mu\rho)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2\mu\rho}}\mathrm{e}^{-\mu\rho}\quad(\text{当 }\mu\rho\to\infty)$$

由此可知 μ 必须满足以下要求：

① $\mathrm{Re}\,\mu\geqslant0$，否则将因 $\mathrm{e}^{-\mu\rho}$导致在 $\rho\to\infty$处发散。

② 若 μ 为虚数，则必须取 $\mu=-\mathrm{i}p$，$p=\sqrt{k^2-q^2}$，这样才能得到外行波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\rho}$。

积分路径必须保证 μ 满足上述要求。

μ 的支点在 $q=\pm k$。在 $q=-k$ 附近

$$q=-k+\varepsilon e^{i\alpha},\quad \mu\approx(-2k\varepsilon e^{i\alpha})^{1/2}=\sqrt{2k\varepsilon}e^{i\frac{\alpha+\pi}{2}}$$

在 $q=k$ 附近

$$q=k+\varepsilon e^{i\alpha},\quad \mu=\sqrt{2k\varepsilon}e^{i\alpha/2}$$

以上 $\varepsilon\to 0$。为保证 $\mathrm{Re}\mu\geqslant 0$，在 $q=-k$ 和 $q=k$ 附近，α 的取值范围应分别为 $-2\pi\leqslant\alpha\leqslant-\pi$ 和 $-\pi\leqslant\alpha\leqslant 0$。由此知积分路径应如图 8-8-1 所示，记为 Γ。

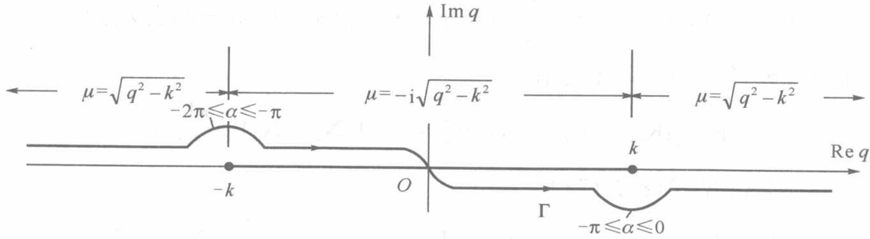


图 8-8-1　式(8-8-11)的积分路径

8.8.4　系数 C 的确定

柱坐标系中求得的总功率应与式(8-8-7)的结果相同，由此可确定系数 C。

在柱坐标系中，能流密度的径向分量为

$$j_\rho=-\mathrm{Re}(\dot{\phi}^*\nabla\phi\cdot\boldsymbol{e}_\rho)=-\mathrm{Re}\left(i\omega\dot{\phi}^*\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)\tag{8-8-12}$$

其中 ϕ 已由式(8-8-11)给出。以 z 轴为轴线，取一无限长圆柱面，则穿出该整个柱面的能流即为源发出的总功率，故有

$$4\pi\omega k=\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\rho j_\rho\mathrm{d}z$$

把式(8-8-11)代入式(8-8-12)，再代入上式，有

$$4\pi\omega k=-2\pi\omega\mid C\mid^2\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathrm{Re}\left[i\int_\Gamma\mathrm{d}q'\mathrm{K}_0^*(\mu'\rho)\int_\Gamma\mathrm{d}q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{K}_0(\mu\rho)e^{i(q-q')z}\right]\right\}\rho\mathrm{d}z\tag{8-8-13}$$

其中 $\mu'^2=q'^2-k^2$。

先对 z 积分。利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(q-q')z}\mathrm{d}z=2\pi\delta(q-q')$$

$$\int_\Gamma\mathrm{d}q'\mathrm{K}_0^*(\mu'\rho)\delta(q-q')=\mathrm{K}_0^*(\mu\rho)$$

〔关于 $\delta(q-q'$ 见 9.,1 节〕以及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{K}_0(\mu\rho)=-\mu\mathrm{K}_1(\mu\rho)$$

代入式(8-8-13)，利用公式 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)$〔见式(9-1-14)〕可得

$$4\pi\omega k = (2\pi)^2\omega \mid C \mid^2 \mathrm{Re}\int_\Gamma \mathrm{d}q[\mathrm{i}\mathrm{K}_0^*(\mu\rho)\mu\rho\mathrm{K}_1(\mu\rho)] \tag{8-8-14}$$

在 $q<-k$ 和 $q>k$ 区间，μ 为实数，积分中方括号内为纯虚数，故此二区间对结果的贡献为 0。

在 $(-k,k)$ 区间，$\mu=-\mathrm{i}p$，由式(8-7-8)知

$$\mathrm{K}_0(\mu\rho)=\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\mathrm{H}_0^{(1)}(p\rho),\quad \mathrm{K}_1(\mu\rho)=-\frac{\pi}{2}\mathrm{H}_1^{(1)}(p\rho)$$

故

$$\mathrm{i}\mathrm{K}_0^*(\mu\rho)\mu\rho\mathrm{K}_1(\mu\rho)=\mathrm{i}\frac{\pi^2}{4}[(\mathrm{J}_0\mathrm{J}_1+\mathrm{N}_0\mathrm{N}_1)+\mathrm{i}(\mathrm{J}_0\mathrm{N}_1-\mathrm{N}_0\mathrm{J}_1)]p\rho$$

〔其中 J_0 等是 $\mathrm{J}_0(p\rho)$ 等的简写〕于是有

$$\mathrm{Re}\,[\mathrm{i}\mathrm{K}_0^*(\mu\rho)\mu\rho\mathrm{K}_1(\mu\rho)]=-(\mathrm{J}_0\mathrm{N}_1-\mathrm{N}_0\mathrm{J}_1)\frac{\pi^2}{4}p\rho \tag{8-8-15}$$

再利用朗斯基行列式〔见式(8-2-17)〕

$$W[\mathrm{J}_0(\zeta),\mathrm{N}_0(\zeta)]=\mathrm{J}_0\mathrm{N}'_0-\mathrm{J}'_0\mathrm{N}_0=-(\mathrm{J}_0\mathrm{N}_1-\mathrm{J}_1\mathrm{N}_0)=\frac{2}{\pi\zeta}$$

可知式(8-8-15)右边等于 $\pi/2$，代入式(8-8-14)即得

$$4\pi\omega k = (2\pi)^2\omega \mid C \mid^2 \int_{-k}^{k} \mathrm{d}q\,\frac{\pi}{2} = 4\pi^3\omega \mid C \mid^2 k$$

比较两边，可知 $C=1/\pi$。代入式(8-8-11)，最后得到

$$\phi(\rho,z) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mathrm{K}_0(\mu\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qz}\mathrm{d}q \tag{8-8-16}$$

此即索末菲球面波公式，其中 $\mu^2=q^2-k^2$。

习　题　8

8.1　证明 $\zeta(\mathrm{J}'_\nu\mathrm{J}_{-\nu}-\mathrm{J}'_{-\nu}\mathrm{J}_\nu)=\dfrac{2\sin\nu\pi}{\pi}$。

8.2　证明式(8-2-23)。

8.3　证明式(8-3-2)和式(8-3-3)。

8.4　证明 $\mathrm{K}_0^*(-\mathrm{i}p)=\mathrm{K}_0(\mathrm{i}p)$（$p$ 为实数）。

8.5　证明朗斯基行列式(8-7-19)。

8.6　求下列积分（a、b 为常数）。

(1) $\int z\mathrm{J}_0(az)\mathrm{d}z$；

(2) $\int z^3\mathrm{J}_0(z)\mathrm{d}z$；

(3) $\int z\mathrm{J}_l^2(az)\mathrm{d}z$；

(4) $\int z\mathrm{J}_l(az)\mathrm{K}_l(bz)\mathrm{d}z$。

第9章　δ函数

δ 函数在求解有源区域中的场分布问题以及非稳态问题中有重要的应用。此外，分段连续函数的导数也需要用 δ 函数加以表达。但 δ 函数不是通常意义上的函数，本节将介绍它的主要性质。在第 10 章中将看到 δ 函数在非齐次方程定解问题中的应用。

9.1　一维 δ 函数的定义及基本性质

9.1.1　δ 函数的引入

考虑函数

$$\delta(x,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2x^2)}\quad(\alpha>0)\tag{9-1-1}$$

如图 9-1-1 所示。由此可以看出，

$$\lim_{\alpha\to\infty}\delta(x,\alpha)=\begin{cases}0, & (x\neq 0)\\ \infty & (x=0)\end{cases}\tag{9-1-2}$$

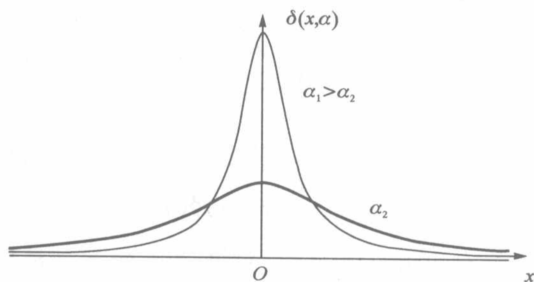


图 9-1-1　$\delta(x,\alpha)$的函数图形

再考虑积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x,\alpha)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}=\frac{1}{\pi}\arctan(\alpha x)\Big|_{-\infty}^{\infty}=1\tag{9-1-3}$$

结果与 α 无关，故有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\alpha\to\infty}\delta(x,\alpha)\mathrm{d}x=1\tag{9-1-4}$$

根据以上可定义 δ 函数如下：

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\delta(x,\alpha)\tag{9-1-5}$$

$\delta(x,\alpha)$称为 $\delta(x)$的辅助函数(auxiliary function)。

综合式(9-1-2)和式(9-1-4)，可知 δ 函数有如下性质：

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & (x\neq 0)\\ \infty & (x=0)\end{cases},\quad\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1\tag{9-1-6}$$

注意，式(9-1-1)并非 $\delta(x,\alpha)$的唯一形式。例如

$$\delta(x,\alpha)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2},\quad \frac{\sin\alpha x}{\pi x}$$

也都满足式(9-1-2)和式(9-1-4)。

9.1.2 δ函数的导数

先考察 $\delta'(x)$ 的函数形式。因为 α 与 x 无关,故由定义式(9-1-5)有

$$\delta'(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x,\alpha) \tag{9-1-7}$$

利用式(9-1-1),有

$$\delta'(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-2\alpha^3x}{\pi(1+\alpha^2x^2)^2}\right] \tag{9-1-8}$$

图 9-1-2 给出了右边方括号中函数(以 $F(x,\alpha)$ 代表)随 x 变化的曲线。易于求得 $F(x,\alpha)$ 的峰点在 $x=\pm\frac{1}{\alpha\sqrt{3}}$,峰值为 $\mp\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\alpha^2$,故在 $\alpha\to\infty$ 时,峰点分别趋于 0^+ 和 0^-,峰值分别在 $-\infty$ 和 $+\infty$;而在 $x\neq0$ 处,$\lim\limits_{\alpha\to\infty}F(x,\alpha)=0$。故有

$$\delta'(x)=\begin{cases}\infty & (x=0^-)\\ 0 & (x\neq0)\\ -\infty & (x=0^+)\end{cases} \tag{9-1-9}$$

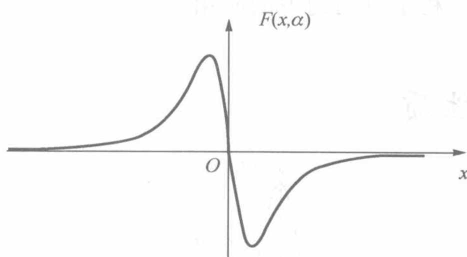


图 9-1-2　$F(x,\alpha)$的函数图形

此即 $\delta'(x)$ 的函数形式。

$\delta'(x)$ 与一般连续函数的导数不同,它本身也不是连续函数,因此仅在积分中有意义。对此说明如下:设 $\phi(x)$ 为连续函数,在 $x=0$ 处的导数存在。考虑积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)\phi(x)\mathrm{d}x=\delta(x)\,\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\phi'(x)\mathrm{d}x$$

等号右边第一项为 0。对第二项,注意到被积函数仅在 $x=0$ 处不为 0,故可将其中 $\phi'(x)$ 换成 $\phi'(0)$ 并从积分号中提出,从而有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)\phi(x)\mathrm{d}x=-\phi'(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=-\phi'(0) \tag{9-1-10}$$

这表明,连续函数 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 处的导数可以表示为 $\delta'(x)\phi(x)$ 的积分的负值。式(9-1-10)也可以作为 $\delta'(x)$ 的定义式。

9.1.3 δ(x)的其他性质

① 由于 $\delta(x,\alpha)$ 是 x 的偶函数,故 $\delta(x)$ 是偶函数,即有

$$\delta(-x)=\delta(x) \tag{9-1-11}$$

② 根据式(9-1-5),有 $x\delta(x)=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha x}{\pi(1+\alpha^2x^2)}$,无论 x 是否为 0,该极限总为 0。因此有

$$x\delta(x)=0 \tag{9-1-12}$$

③ 因为 $\delta(x-x_0)$ 仅在 $x=x_0$ 处不为 0,故有

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0) \tag{9-1-13}$$

这可称为 $\delta(x)$ 函数的"过滤"性质。

④ 由式(9-1-13)，并利用式(9-1-6)，又有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x_0) \tag{9-1-14}$$

在理论分析中，经常利用此式将任一连续函数 $f(x)$ 在某点 x_0 的值表示为一个积分。

⑤ 若 $f(x)$ 连续，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax-b)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right) \tag{9-1-15}$$

证

记 $u=ax-b$。若 $a>0$，即 $a=|a|$，则按式(9-1-14)可得

$$\text{左边} = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u+b}{a}\right)\delta(u)\frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right)$$

若 $a<0$，则 $\mathrm{d}u=-|a|\mathrm{d}x$，并且 $x=\mp\infty$ 对应于 $u=\pm\infty$，所以有

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \int_{\infty}^{-\infty} f\left(\frac{u+b}{a}\right)\delta(u)\frac{\mathrm{d}u}{-|a|}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u+b}{a}\right)\delta(u)\frac{\mathrm{d}u}{|a|} = \frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

证完。

⑥ 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = \begin{cases} f(x_0) & (a<x_0<b) \\ 0 & (x_0<a, x_0>b) \\ \frac{1}{2}f(x_0) & (x_0=a,\text{或 } x_0=b) \end{cases} \tag{9-1-16}$$

证　因为在 $x\neq x_0$ 处 $f(x)\delta(x-x_0)=0$，故当 $a<x_0<b$ 时，式中的积分域可扩展到整个无穷区间，于是由性质④知第一个结果成立。对第二个结果，因为在积分域内 $\delta(x-x_0)=0$，故积分为 0。

下面证明第三个结果。以 $x_0=a$ 为例。

因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，故由式(9-1-13)和式(9-1-5)，有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{\infty} f(x_0)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x\\ &= f(x_0)\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\infty}\delta(u,\alpha)\mathrm{d}u \quad (u=x-x_0)\end{aligned}$$

而 $\delta(u,\alpha)$ 是 u 的偶函数，并且满足式(9-1-3)，故有

$$\int_0^{\infty}\delta(u,\alpha)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u,\alpha)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}$$

于是得

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0)$$

证完。

⑦ 对于连续函数 $f(x)$，若 $f(x_k)=0(k=1,2,\cdots)$，且 $f(x)$ 在每一 x_k 邻域内单调，则有

$$\delta[f(x)] = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|} \tag{9-1-17}$$

证　设 $\phi(x)$ 为任一连续函数，考虑积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\delta[f(x)]\phi(x)\mathrm{d}x$$

因为在 $f(x)\neq 0$ 处 $\delta[f(x)]=0$，故只需考虑各 x_k 的无限小邻域内的贡献：

$$I=\sum_k\int_{x_k^-}^{x_k^+}\delta[f(x)]\phi(x)\mathrm{d}x=\sum_k I_k$$

其中 $I_k=\int_{x_k^-}^{x_k^+}\delta[f(x)]\phi(x)\mathrm{d}x$ 。

在无限小区间 (x_k^-,x_k^+) 内，有 $\mathrm{d}f=f'(x_k)\mathrm{d}x$。因为 $f(x)$ 在此区间内单调，故 $f(x)$ 在零点 x_k 的两侧一定反号。对 $f'(x_k)>0$ 和 $f'(x_k)<0$，x 的区间端点 x_k^-、x_k^+ 分别对应于纵坐标 $f=0^-$、0^+ 和 $f=0^+$、0^-，如图 9-1-3 所示。

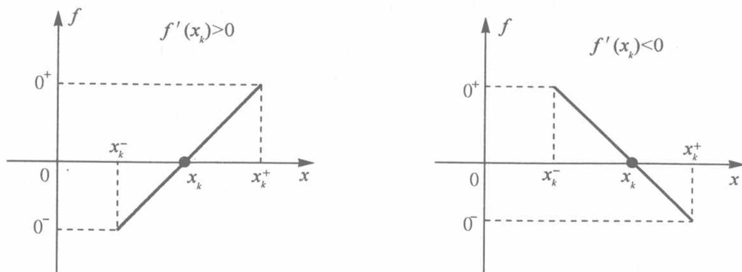


图 9-1-3　$f(x)$ 在 x_k 邻域中的情况

这样，当 $f'(x_k)>0$ 时就有

$$I_k=\int_{0^-}^{0^+}\delta(f)\frac{\phi(x)}{f'(x_k)}\mathrm{d}f=\frac{\phi(x_k)}{|f'(x_k)|}$$

当 $f'(x_k)<0$ 时，有

$$I_k=\int_{0^+}^{0^-}\delta(f)\frac{\phi(x)}{f'(x_k)}\mathrm{d}f=-\int_{0^-}^{0^+}\delta(f)\frac{\phi(x)}{f'(x_k)}\mathrm{d}f=\frac{\phi(x_k)}{|f'(x_k)|}$$

故无论 $f'(x_k)>0$ 或 $f'(x_k)<0$，总有

$$I_k=\frac{\phi(x_k)}{|f'(x_k)|}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_k)\frac{\phi(x)}{|f'(x_k)|}\mathrm{d}x$$

于是有

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\delta[f(x)]\phi(x)\mathrm{d}x=\sum_k\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_k)\frac{\phi(x)}{|f'(x_k)|}\mathrm{d}x$$

比较此式中的两个积分，注意到 $\phi(x)$ 为任意连续函数，而求和与积分可交换顺序，即可得到式(9-1-17)。证完。

在式(9-1-17)中依次取 $f(x)=ax$ 和 $ax-b$，注意到 $f(x)$ 只有一个零点，则可得以下公式：

$$\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|},\quad \delta(ax-b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x-\frac{b}{a}\right)\tag{9-1-18}$$

⑧ 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ 存在，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(n)}(x)\mathrm{d}x=(-)^n f^{(n)}(0)\tag{9-1-19}$$

用数学归纳法即可证明上式，只需注意到 $\delta^{(n)}(x)=0$(当 $x\neq 0$)。证明从略。

在式(9-1-19)中取 $f(x)=x^n$，则因 $f^{(n)}(x)=n!$，可得如下公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \delta^{(n)}(x)\mathrm{d}x = (-)^n n! \tag{9-1-20}$$

另外，由式(9-1-19)和性质④还可写出：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\mathrm{d}x &= (-)^n f^{(n)}(x_0) \\ &= (-)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x \end{aligned}\tag{9-1-21}$$

此可作为 $\delta^{(n)}(x-x_0)$的定义。

9.1.4 δ函数的积分表示

对 $\delta(x-x_0)$作傅里叶变换：

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k$$

则

$$\tilde{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

故有

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos[k(x-x_0)]\mathrm{d}k \tag{9-1-22}$$

此即 δ 函数的积分表示，它在电磁场理论分析中常会用到。

9.2 分段可微函数的符号导数

9.2.1 亥维赛单位阶跃函数 H(x)

亥维赛(Heaviside)单位阶跃函数定义为

$$H(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{9-2-1}$$

由此定义可绘出 $H(x-x_0)$和 $H(x_0-x)$的图线，如图 9-2-1 所示。

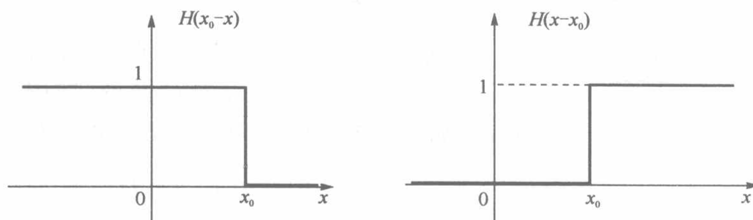


图 9-2-1 $H(x-x_0)$和 $H(x_0-x)$的图线

利用 $H(x)$可将分段连续函数写成一个式子。例如，分段连续函数

$$g(x)=\begin{cases}g_1(x) & (x<x_0)\\ g_2(x) & (x>x_0)\end{cases}$$

可表示为

$$g(x)=g_1(x)H(x_0-x)+g_2(x)H(x-x_0)$$

现考虑 $H(x)$的导数。设 $\phi(x)$为一连续函数，若它满足 $\phi(\pm\infty)\to 0$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = H(x)\,\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \tag{9-2-2}$$

该式可作为 $H'(x)$的定义式。由此可进一步导出 $H'(x)$的表达式。

由式(9-2-1)可知，上式右边即

$$-\int_{0}^{\infty} \phi'(x)\mathrm{d}x =-\phi(x)\Big|_{0}^{\infty} = \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$

与式(9-2-2)左边比较可知，在积分的意义下，

$$H'(x)=\delta(x) \tag{9-2-3}$$

式(9-2-3)又可推广为

$$H'(x-x_0)=\delta(x-x_0) \tag{9-2-4}$$

对以上表达式亦可做直观的理解：在 $x\neq x_0$ 处 $H(x-x_0)$是常数，故 $H'(x-x_0)=0$；但在从 x_0^- 到 x_0^+ 的无限小区间上，$H(x-x_0)$发生从 0 到 1 的突变，故变化率为正的∞。

9.2.2 符号导数

一个函数若除有限个点外，处处连续且可导，则称为分段可微函数。δ 函数和 H 函数皆属此列。这类函数的导数与一般连续函数的导数意义有所不同，因为在间断点上不可能有普通意义下的导数。前面已见，δ 函数和 H 函数的导数仅在积分的意义下成立，见式(9-1-10)和式(9-2-2)。我们称这种意义下的导数为符号导数，并由此给出符号导数的定义：若 $f(x)$为分段可微函数，则其符号导数 $f_s'(x)$应使式(9-2-5)成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_s'(x)\phi(x)\mathrm{d}x =-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \tag{9-2-5}$$

其中 $\phi(x)$为满足条件 $\phi(\pm\infty)\to 0$ 的连续函数。

9.2.3 分段可微函数 f(x)的符号导数

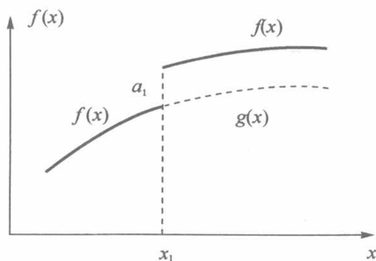


图 9-2-2　$f(x)$的函数图形

先考虑 $f(x)$仅有一个间断点 $x=x_1$ 的情况。

设 $f(x)$在间断点 x_1 处的跃度（即函数值的突变量）为 a_1，如图 9-2-2 所示。显然 $f(x)$可写为

$$f(x)=g(x)+a_1H(x-x_1) \tag{9-2-6}$$

这样，函数 $g(x)=f(x)-a_1H(x-x_1)$即为连续函数。把式(9-2-6)代入式(9-2-5)右边，做分部积分。注意到 $\phi(\pm\infty)\to 0$，则可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_s'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} [g'(x) + a_1\delta(x - x_1)]\phi(x)\mathrm{d}x$$

这里已利用了式(9-2-4)。比较等号两边，即有

$$f'_s(x)=g'(x)+a_1\delta(x-x_1) \tag{9-2-7}$$

此即分段连续函数的导数公式。以上表明,引入 $H(x)$,把分段连续函数 $f(x)$ 写为式(9-2-6)的形式,就可像连续函数一样求导。

显然,式(9-2-7)可推广到 $f(x)$ 有 n 个间断点的情况:

$$f'_s(x)=g'(x)+\sum_{i=1}^{n}a_i\,\delta(x-x_i) \tag{9-2-8}$$

a_i 为间断点 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 处的跃度。

9.2.4 符号函数 sgn *x* 及其导数

定义

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases} \tag{9-2-9}$$

$\operatorname{sgn}x$ 仅有一个间断点 $x=0$,此处的跃度为 2,故按式(9-2-6)可写出

$$\operatorname{sgn}x=-1+2H(x) \tag{9-2-10}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}x=2\delta(x) \tag{9-2-11}$$

另外,由式(9-2-9)可知

$$\operatorname{sgn}x=\frac{|x|}{x}=\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} \tag{9-2-12}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}^2|x|}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sgn}x=2\delta(x) \tag{9-2-13}$$

式(9-2-12)和式(9-2-13)在涉及到绝对值的积分中很有用。

【例 9-2-1】 求积分 $I=\int_{-1}^{1}|x|\,f''(x)\mathrm{d}x$。

解 按分部积分,有

$$I=[|x|\,f'(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}|x|'f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=[|x|\,f'(x)-|x|'f(x)]\,|_{-1}^{1}+\int_{-\infty}^{\infty}|x|''f(x)\mathrm{d}x$$

由式(9-2-12)和式(9-2-13),即可得

$$I=f'(1)-f'(-1)-f(1)+f(-1)+2f(0)$$

【例 9-2-2】 证明 $u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-\zeta|}\phi(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 满足方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+k^2u=2\mathrm{i}k\phi(x)$。

证 对 $u(x)$ 求导,利用式(9-2-12)和式(9-2-13),有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-\zeta|}\operatorname{sgn}(x-\zeta)\phi(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}k)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-\zeta|}\,[\operatorname{sgn}(x-\zeta)]^2\phi(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-\zeta|}\,2\delta(x-\zeta)\phi(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

因为$[\mathrm{sgn}(x-\zeta)]^2=1$，故由上式得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}=-k^2 u+2\mathrm{i}k\phi(x)$$

证完。

9.3 三维 δ 函数

9.3.1 定义

三维空间中的 δ 函数记为 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$，它应满足以下要求：

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\begin{cases}0 & (\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0)\\ \infty & (\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0)\end{cases},\quad \int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V=\begin{cases}1 & (\boldsymbol{r}_0\in V)\\ 0 & (\boldsymbol{r}_0\notin V)\end{cases} \tag{9-3-1}$$

由此有

$$\int_\infty \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V=1 \tag{9-3-2}$$

$$\int_V f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V=\begin{cases}f(\boldsymbol{r}_0) & (\boldsymbol{r}_0\in V)\\ 0 & (\boldsymbol{r}_0\notin V)\end{cases} \tag{9-3-3}$$

显然，$f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=f(\boldsymbol{r}_0)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$。

9.3.2 δ 函数的分离变量形式

前面式(9-3-2)和式(9-1-14)已给出

$$\int_\infty \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V=1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1$$

现假定已取定广义正交曲线坐标系，q_1、q_2、q_3 分别为沿 3 个正交方向的广义坐标。规定关于广义坐标 q_i 的 δ 函数满足

$$\int_{W_i}\delta(q_i-q_{i0})\mathrm{d}q_i=1\quad(i=1,2,3) \tag{9-3-4}$$

其中 W_i 表示广义坐标 q_i 的整个值域。

在该坐标系中，体积元 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2\mathrm{d}l_3$，$\mathrm{d}l_i$ 表示沿 q_i 方向的长度微元：

$$\mathrm{d}l_i=h_i\mathrm{d}q_i\quad(i=1,2,3) \tag{9-3-5}$$

其中 h_i 为拉米系数。代入式(9-3-2)，得

$$\int_\infty \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V=\int_\infty \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)h_1h_2h_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3=1 \tag{9-3-6}$$

另一方面，将式(9-3-4)中的三式相乘，又有

$$\int_\infty \delta(q_1-q_{10})\delta(q_2-q_{20})\delta(q_3-q_{30})\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3=1 \tag{9-3-7}$$

与式(9-3-6)相比较，得

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\delta(q_1-q_{10})\delta(q_2-q_{20})\delta(q_3-q_{30}) \tag{9-3-8}$$

此即三维 δ 函数的分离变量形式。

在直角坐标系中，$dq_1=dx, dq_2=dy, dq_3=dz, h_1=h_2=h_3=1$，故有

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{9-3-9}$$

在柱坐标系(ρ,φ,z)中，$dq_1=d\rho, dq_2=d\varphi, dq_3=dz, h_1=h_3=1, h_2=\rho$，故

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0) \tag{9-3-10}$$

在球坐标系(r,θ,φ)中，$dq_1=dr, dq_2=d\theta, dq_3=d\varphi, h_1=1, h_2=r, h_3=r\sin\theta$，故有

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(r-r_0)}{r^2}\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin\theta}\delta(\varphi-\varphi_0) \tag{9-3-11}$$

9.4 以$\delta(\boldsymbol{r})$为非齐次项的泊松方程

在第10章中将介绍用格林函数法求由连续分布的源引起的场分布，那时会遇到以$\delta(\boldsymbol{r})$为非齐次项的泊松(Poisson)方程。本节先给出该方程的解。

9.4.1 三维情况

首先证明

$$\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{9-4-1}$$

其中$R=|\boldsymbol{R}|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$，$\boldsymbol{r}_0$为三维空间中一确定点的位矢。

证 考察积分

$$I=\int_V\left(\nabla^2\frac{1}{R}\right)dV \tag{9-4-2}$$

V为包围$\boldsymbol{r}_0$点在内的任一体积。因为在$R\neq0$(即$\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0$)处$\nabla^2\frac{1}{R}$恒为0，故积分只来自$\boldsymbol{r}_0$点的贡献。因此可用以$\boldsymbol{r}_0$点为球心的小球体$V'$代替$V$，如图9-4-1所示。

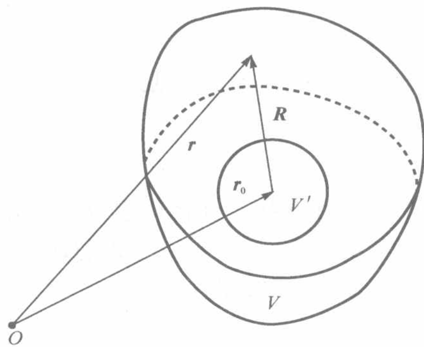


图9-4-1 积分域V

按散度定理，式(9-4-2)的等号右边可写为$\oiint_S\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$，这里$S$为包围$V'$的球面。对$S$面上的点，有

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

这里$\boldsymbol{e}_R$是$\boldsymbol{R}$的单位矢，沿球面S的外法向方向，故式(9-4-2)成为

$$I=-\oiint_S\frac{1}{R^2}\boldsymbol{e}_R\cdot d\boldsymbol{S}=-\oiint_S\frac{dS}{R^2}$$

$$=-4\pi=-4\pi\int_V\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)dV \tag{9-4-3}$$

比较式(9-4-2)和式(9-4-3)，注意到V任意，便得到式(9-4-1)。证完。

由式(9-4-1)知，方程

$$\nabla^2 G = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{9-4-4}$$

的解是

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{9-4-5}$$

9.4.2 二维情况

考虑二维方程

$$\nabla^2 G = -\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0) \tag{9-4-6}$$

这里 $\boldsymbol{\rho}$ 为二维矢径。

记 $\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{R}$,并以 $\boldsymbol{\rho}_0$ 所指为原点取平面极坐标系(R,φ),$R=|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|$。根据式(9-3-10)可知,在此坐标系中,$\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)=\dfrac{\delta(R)}{R}\delta(\varphi)$。因为 $\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$关于 $R=0$ 对称,即与 φ 无关,故 G 与 φ 无关。于是式(9-4-6)成为

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}R}\right) = -\frac{1}{R}\delta(R)\delta(\varphi)$$

由此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}R}\right) = -\delta(R)\delta(\varphi) \tag{9-4-7}$$

在区间$[0,2\pi]$内对 φ 积分,利用 $\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\mathrm{d}\varphi=1$,见式(9-3-4),可得

$$2\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}R}\right) = -\delta(R) \tag{9-4-8}$$

因为 $H'(R)=\delta(R)$,见式(9-2-3),可知式(9-4-8)给出 $2\pi R\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}R}=-H(R)$,于是有

$$2\pi\mathrm{d}G = -H(R)\frac{\mathrm{d}R}{R} \tag{9-4-9}$$

将此式两边对 R 在区间$[1,R]$上积分,注意到在该区间上 $H(R)=1$,可得

$$2\pi[G(R)-G(1)] = -\ln R = -\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0| \tag{9-4-10}$$

规定 $G(1)=0$,即有

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|} \tag{9-4-11}$$

9.4.3 一维情况

读者可自行验证,一维方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2} = -\delta(x-x_0) \tag{9-4-12}$$

的解是

$$G(x) = xH(x_0-x)+x_0H(x-x_0) \tag{9-4-13}$$

值得注意的是,一维方程的解 $G(x)$是连续函数,只是导数不连续,如图 9-4-2 所示。这表明 $G(x)$的奇性比较弱。比较起来,一维方程解的奇性最弱,三维方程解的奇性最强。

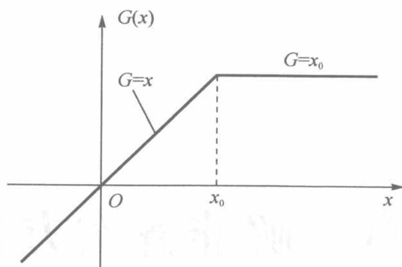


图 9-4-2　$G(x)$的函数图形

习　题　9

9.1　求函数 $f(x)=\begin{cases}2\cos kx & (x>0)\\ \sin kx & (x<0)\end{cases}$的符号导数。

9.2　已知 $u(x)=\int |x-\zeta|\phi(\zeta)\mathrm{d}\zeta$（$\phi(\zeta)$ 为任一连续函数），试导出 $u(x)$满足的微分方程。

9.3　验证式(9-4-11)满足方程(9-4-6)。

第 10 章　解非齐次方程定解问题的格林函数法

有源情况下，由麦克斯韦方程组导出的二阶微分方程是非齐次的。对这类方程的最重要的求解方法就是格林函数法。本章将介绍格林函数的概念和基本性质，利用格林函数给出非齐次微分方程的积分解，并导出稳恒情况下以及辐射问题中的格林函数。

10.1　格林函数的物理意义和一般性质

10.1.1　格林函数

分析时谐电磁波问题时，在分离时、空变量后可得亥姆霍兹方程：

$$(\nabla^2+k^2)u(\boldsymbol{r})=-f(\boldsymbol{r})\quad(-\infty<x,y,z<\infty)\tag{10-1-1}$$

其中 $f(\boldsymbol{r})$为已知函数，代表源的空间分布。为求解此方程，设

$$u(\boldsymbol{r})=\iiint\limits_{\infty}f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\tag{10-1-2}$$

这里 $\mathrm{d}V'$代表位矢为$\boldsymbol{r}'$处的体积元，下同。利用 δ 函数，有

$$f(\boldsymbol{r})=\iiint\limits_{\infty}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\tag{10-1-3}$$

把式(10-1-2)和式(10-1-3)代入式(10-1-1)，注意到∇^2 仅对场点的坐标 $\boldsymbol{r}$ 有作用，而积分变量是 $\boldsymbol{r}'$，故∇^2 与积分可交换顺序，于是式(10-1-1)可写为

$$\iiint\limits_{\infty}f(\boldsymbol{r}_0)(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'=-\iiint\limits_{\infty}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$

因为上式对于任意给定的 $f(\boldsymbol{r}')$都成立，故有

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\tag{10-1-4}$$

只要由此解出 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，代入式(10-1-2)即可得到 $u(\boldsymbol{r})$。这样，求解 $u(\boldsymbol{r})$就转化为求解方程(10-1-4)。$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$称为方程(10-1-1)的格林(Green)函数，或基本解。

显然，$k=0$ 时，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$就是泊松方程的格林函数。式(9-4-5)已经给出，无界空间中泊松方程的格林函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{10-1-5}$$

10.1.2 格林函数的物理意义

在方程(10-1-1)中，$f(\boldsymbol{r})$代表源的密度分布，$u(\boldsymbol{r})$为由源引起的场分布。例如在电磁场问题中，若$u(\boldsymbol{r})$代表标量位，则$f(\boldsymbol{r})$即为电荷密度除以介电常数ε。为方便，可以省略ε，简单地称$f(\boldsymbol{r})$为电荷密度。

将式(10-1-4)与式(10-1-1)相比较，注意到$\delta(0)=\infty$，而$\int_{\infty}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V=1$，可知$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$是由$\boldsymbol{r}'$处的一个带有单位电量，但电荷密度无穷大的点源在$\boldsymbol{r}$处激发的场。此即格林函数的物理意义。

设$f(\boldsymbol{r})$为电荷密度，则$f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$就是在$\boldsymbol{r}'$处体元$\mathrm{d}V'$中的总电量，即$\boldsymbol{r}'$处的电荷元。于是$f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$就代表由该电荷元在场点$\boldsymbol{r}$处产生的场。可见式(10-1-2)的含意是，把积分区域中全体电荷元(坐标用$\boldsymbol{r}'$表示)各自在$\boldsymbol{r}$处产生的场线性叠加起来，其结果就是总场$u(\boldsymbol{r})$。

10.1.3 格林函数的一般性质

格林函数有以下两条性质。

①格林函数关于$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$对称，即

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) \tag{10-1-6}$$

证 为简洁，记$G_1(\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)$，$G_2(\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2)$。考虑以下两个类似的定解问题：

$$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)G_1=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) & (\boldsymbol{r}\in V)\\ \left[\alpha(\boldsymbol{r})\dfrac{\partial G_1}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r})G_1\right]_S=0\end{cases} \tag{10-1-7}$$

$$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)G_2=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2) & (\boldsymbol{r}\in V)\\ \left[\alpha(\boldsymbol{r})\dfrac{\partial G_2}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r})G_2\right]_S=0\end{cases} \tag{10-1-8}$$

其中S为V的表面。式中的求导皆对$\boldsymbol{r}$而言，$\dfrac{\partial G}{\partial n}$表示对$S$上$\boldsymbol{r}$处的函数$G$求法方向的导数。以$G_2$乘式(10-1-7)中第一式，以$G_1$乘式(10-1-8)中第一式，两者相减，然后对$V$积分，得

$$\begin{aligned}\iiint_V[G_2\nabla^2G_1-G_1\nabla^2G_2]\mathrm{d}V&=-G_2(\boldsymbol{r}_1)+G_1(\boldsymbol{r}_2)\\&=-G(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)+G(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\end{aligned} \tag{10-1-9}$$

利用第二格林公式(1-2-16)，有

$$\iiint_V[G_2\nabla^2G_1-G_1\nabla^2G_2]\mathrm{d}V=\oiint_S\left[G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}-G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{10-1-10}$$

利用式(10-1-7)和式(10-1-8)中的边界条件，可知此积分为0。于是式(10-1-9)给出$G(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=G(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)$。把$\boldsymbol{r}_1$改为$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}_2$改为$\boldsymbol{r}'$，即得式(10-1-6)。证完。

式(10-1-6)又被称为格林函数的互易定理(reciprocity principle)，它表示位于$\boldsymbol{r}'$处的源在$\boldsymbol{r}$处引起的场，与位于$\boldsymbol{r}$处的相同的源在$\boldsymbol{r}'$处引起的场相同。

②空间的维数越高，则格林函数的奇性越强。

为了解格林函数的奇性，我们来考察其在奇点（即函数值趋于无穷大的点）附近的行为。

只要充分接近奇点，方程(10-1-4)中的微商项总会远大于 k^2 项，所以在奇点附近，方程可近似写为泊松方程：

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \approx -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad (|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \sim 0) \tag{10-1-11}$$

在 9.4 节中已经知道，方程

$$\nabla^2 u = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{10-1-12}$$

在三维、二维和一维情况下的解分别为

$$u(\boldsymbol{r}) = (4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|)^{-1} \quad （三维） \tag{10-1-13}$$

$$u(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|} \quad （二维） \tag{10-1-14}$$

$$u(x) = xH(x_0-x) + x_0 H(x-x_0) \quad （一维） \tag{10-1-15}$$

比较式(10-1-11)和式(10-1-12)，可知当以 $\boldsymbol{r}$（或 $\boldsymbol{r}'$）为变点时，格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 以 $\boldsymbol{r}'$（或 $\boldsymbol{r}$）为奇点，它与 u 的奇性相同，即三维格林函数的奇性为 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}$，二维格林函数的奇性为 $\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|$，其奇性弱于三维；而一维格林函数的奇性最弱：函数本身连续，仅导数不连续。

10.1.4 有界空间非齐次方程的形式解

在有界空间中，定解问题除方程以外，还包括边界条件。现在讨论边值问题解的一般形式。

设 $u(\boldsymbol{r})$ 满足方程

$$(\nabla^2 + k^2)u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r}) \quad (\boldsymbol{r} \in V) \tag{10-1-16}$$

则相应的 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 应满足

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad (\boldsymbol{r} \in V) \tag{10-1-17}$$

以 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 乘式(10-1-16)的两边，以 $u(\boldsymbol{r})$ 乘式(10-1-17)的两边，两式相减，得

$$G\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G = u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - f(\boldsymbol{r})G \tag{10-1-18}$$

交换 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$，有

$$G\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') - u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G = u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - f(\boldsymbol{r}')G \tag{10-1-19}$$

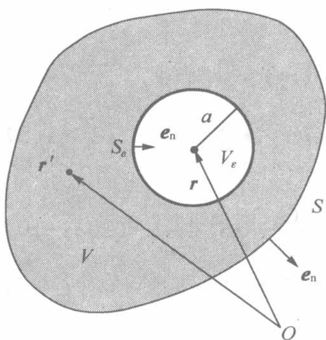


图 10-1-1　体积 $V-V_\varepsilon$

这里 ∇' 表示对 $\boldsymbol{r}'$ 求导。因为 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$，故为保持书写简洁，式(10-1-18)和式(10-1-19)中 G 的变量被隐去不写。

将式(10-1-19)对体积 $V-V_\varepsilon$ 积分，其中 $V_\varepsilon(\in V)$ 为以 $\boldsymbol{r}$ 为心，半径 $a\to 0$ 的球体，如图 10-1-1 所示，图中 $\boldsymbol{e}_n$ 为界面的外法向单位矢。注意到 $\boldsymbol{r}\notin(V-V_\varepsilon)$，故 $u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的积分为 0，于是有

$$\iiint_{V-V_\varepsilon}[G\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') - u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G]\mathrm{d}V' = -\iiint_{V-V_\varepsilon} f(\boldsymbol{r}')G\mathrm{d}V' \tag{10-1-20}$$

利用第二格林公式，式(10-1-20)可写为

$$\oint\!\!\!\oint_S + \oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} \left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial n}\right]\mathrm{d}S' = -\iiint_{V-V_\varepsilon} f(\boldsymbol{r}')G\mathrm{d}V' \tag{10-1-21}$$

这里$\frac{\partial}{\partial n}$表示在$\boldsymbol{r}'$处沿$\boldsymbol{e}_n$方向求导。

考察S_ε上的积分。因为以$\boldsymbol{r}'$为积分变量时，$\boldsymbol{r}$为$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的奇点，在奇点附近，方程近似于泊松方程，故在$S_\varepsilon$上

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{S_\varepsilon} \approx \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi a} \tag{10-1-22}$$

所以S_ε积分中的第一项可写为

$$\begin{aligned}\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} G\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S' &\approx \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial u}{\partial n}a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi' \\ &= \frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi' \end{aligned} \tag{10-1-23}$$

等号后边的积分有限(因为$\frac{\partial u}{\partial n}$有限)，故当$a\to 0$时，

$$\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} G\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S' \to 0 \tag{10-1-24}$$

把式(10-1-22)用于式(10-1-21)中S_ε积分的第二项，注意到a很小，则有

$$\begin{aligned}\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S' &\approx u(\boldsymbol{r})\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{4\pi a}\right)\right]a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi' \\ &= u(\boldsymbol{r})\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4\pi a^2}a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi' = u(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{10-1-25}$$

以上已注意到，在S_ε上，法矢量$\boldsymbol{e}_n$的指向与半径a增大的方向相反，故

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\right|_{S_\varepsilon} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}$$

这样，式(10-1-21)就成为

$$\oint\!\!\!\oint_S \left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial n}\right]\mathrm{d}S' - u(\boldsymbol{r}) = -\iiint_V f(\boldsymbol{r}')G\mathrm{d}V'$$

或

$$u(\boldsymbol{r}) = \oint\!\!\!\oint_S \left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial n}\right]\mathrm{d}S' + \iiint_V f(\boldsymbol{r}')G\mathrm{d}V' \tag{10-1-26}$$

此即边值问题的形式解，它表明，$u(\boldsymbol{r})$不仅与源的分布有关，还与u和G的边界值有关。下面将会看到，根据u的边界条件，适当选取G的边界值，可使$u(\boldsymbol{r})$最终得以确定。

10.1.5 格林函数边界条件的选取

定解问题的边界条件一般分三类。在不同的边界条件下，格林函数边界条件的选取也不同，下面分别列出。

① 第一类边值问题〔狄利赫莱(Dirichlet)定解问题〕：

$$u(\boldsymbol{r})|_S = p(\boldsymbol{r}_S) \tag{10-1-27}$$

$p(\boldsymbol{r}_S)$为已知函数，$\boldsymbol{r}_S$表示在S上的点，下同。

由式(10-1-26)可见,此时只须取

$$G^{(1)}|_S=0 \tag{10-1-28}$$

这里 $G^{(1)}$ 的上标表示它满足第一类边界条件,下同。于是第一类边值问题的解为

$$u(\boldsymbol{r})=\iiint_V f(\boldsymbol{r}')G^{(1)}\mathrm{d}V'-\oiint_S p(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G^{(1)}}{\partial n}\mathrm{d}S' \tag{10-1-29}$$

② 第二类边值问题〔纽曼(Neumann)定解问题〕:

$$\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_S=g(\boldsymbol{r}_S) \tag{10-1-30}$$

此时选 $G^{(2)}$ 满足

$$\left.\frac{\partial G^{(2)}}{\partial n}\right|_S=0 \tag{10-1-31}$$

解为

$$u(\boldsymbol{r})=\iiint_V f(\boldsymbol{r}')G^{(2)}\mathrm{d}V'+\oiint_S G^{(2)}g(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{10-1-32}$$

③ 第三类边值问题(混合边值问题):

$$\left[\alpha(\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r})\right]_S=h(\boldsymbol{r}_S) \tag{10-1-33}$$

其中 $\alpha(\boldsymbol{r})$、$\beta(\boldsymbol{r})$ 是 S 上的已知函数,它们在 S 上不恒为 0,否则就成为第一类或第二类边值问题了。

此时选 $G^{(3)}$ 满足

$$\left[\alpha(\boldsymbol{r})\frac{\partial G^{(3)}}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r})G^{(3)}\right]_S=0 \tag{10-1-34}$$

以 $G^{(3)}|_S$ 乘式(10-1-33)两边,以 $u|_S$ 乘式(10-1-34)两边,所得两式相减,得

$$\left[G^{(3)}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G^{(3)}}{\partial n}\right]_S=\left.\frac{h}{\alpha}G^{(3)}\right|_S=-\left.\frac{h}{\beta}\frac{\partial G^{(3)}}{\partial n}\right|_S \tag{10-1-35}$$

上面最后一步利用了式(10-1-34)。把式(10-1-35)代入式(10-1-26)中的面积分,得

$$u(\boldsymbol{r})=\iiint_V f(\boldsymbol{r}')G^{(3)}\mathrm{d}V'+\oiint_S \frac{h}{\alpha}G^{(3)}\mathrm{d}S' \tag{10-1-36}$$

或

$$u(\boldsymbol{r})=\iiint_V f(\boldsymbol{r}')G^{(3)}\mathrm{d}V'-\oiint_S \frac{h}{\beta}\frac{\partial G^{(3)}}{\partial n}\mathrm{d}S' \tag{10-1-37}$$

总之,在三类边值问题中,只要把 u 的边界条件改为齐次式,并把 u 改为 G,就得到了格林函数的边界条件。

10.2 边值问题中的格林函数

10.2.1 求格林函数的本征函数法

以第一类边值问题为例:

$$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad (\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V)\\ G\Big|_S=0\end{cases} \tag{10-2-1}$$

设该问题的本征函数和本征值分别是$\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$和$\{k_n^2\}$($n$为整数),即有

$$\begin{cases}(\nabla^2+k_n^2)\psi_n(\boldsymbol{r})=0\\ \psi_n(\boldsymbol{r})\Big|_S=0\end{cases} \tag{10-2-2}$$

把$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$在$V$内按$\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$展开:

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_n c_n(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{10-2-3}$$

其中$c_n(\boldsymbol{r}')$待定。显然$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足式(10-2-1)中的边界条件。

把式(10-2-3)代入式(10-2-1),则得到方程

$$\sum_n c_n\nabla^2\psi_n+k^2\sum_n c_n\psi_n=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

利用式(10-2-2),上式即

$$-\sum_n c_n k_n^2\psi_n+k^2\sum_n c_n\psi_n=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{10-2-4}$$

以$\psi_m^*(\boldsymbol{r})$乘式(10-2-4)两边,然后对V取积分,利用本征函数的正交归一关系:

$$\iiint_V \psi_m^*(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V=\delta_{nm} \tag{10-2-5}$$

即可得到

$$c_n=\frac{\psi_n^*(\boldsymbol{r}')}{k_n^2-k^2} \tag{10-2-6}$$

把式(10-2-6)代入式(10-2-3),就得到了$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的本征函数展开式:

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_n\frac{\psi_n^*(\boldsymbol{r}')}{k_n^2-k^2}\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{10-2-7}$$

类似地,第二和第三类边值问题的格林函数可用相应边界条件下的本征函数展开,不另讨论。

【例 10-2-1】 求以下一维有界区间的格林函数:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k^2\right)G(x,x')=-\delta(x-x') \quad (0\leqslant x,x'\leqslant a)\\ G\Big|_{x=0}=0,\quad G\Big|_{x=l}=0\end{cases} \tag{10-2-8}$$

解 相应的本征值问题如下:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k_n^2\right)\psi_n(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant a)\\ \psi_n\Big|_{x=0}=0,\quad \psi_n\Big|_{x=l}=0\end{cases}$$

它的解是熟知的:

$$\begin{cases}\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{k_n}{a}x \quad (0\leqslant x\leqslant a)\\ k_n=\dfrac{n\pi}{a} \quad (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

因此,由式(10-2-7)即得

$$G(x,x') = \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x'}{a}}{\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2}\sin\frac{n\pi x}{a} \quad (0 \leqslant x, x' \leqslant a)$$

10.2.2 一维格林函数的有限形式

用本征函数表示格林函数通常有无穷多项。但在一维情况下，格林函数可表示为有限项函数的线性叠加。

格林函数方程是非齐次方程。我们知道，对一维非齐次方程

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{10-2-9}$$

而言〔其中 $p(x)$、$q(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，撇号表示求导〕，若相应齐次方程的两线性无关解为 y_1 和 y_2，则方程的通解可写为

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(\xi)f(\xi)}{W(y_1,y_2)}\mathrm{d}\xi + y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(y_1,y_2)}\mathrm{d}\xi \tag{10-2-10}$$

式中常数 c_1、c_2 由给定的边值条件确定。$W(y_1,y_2)$ 为 y_1 和 y_2 的朗斯基行列式：

$$W(y_1,y_2) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 \tag{10-2-11}$$

它在 $[a,b]$ 内不为 0。

对格林函数亦可采用上述方法。下面举例说明。

【例 10-2-2】 定解问题与例 10-2-1 相同，求 $G(x,x')$ 的有限形式。

解 方程(10-2-8)显然具有式(10-2-9)的形式，其中 $f(x) = -\delta(x-x')$。

相应齐次方程的两个线性无关特解为 $y_1(x) = \sin kx$，$y_2(x) = \cos kx$，于是

$$W(y_1,y_2) = k\begin{vmatrix} \sin kx & \cos kx \\ \cos kx & -\sin kx \end{vmatrix} = -k$$

根据式(10-2-10)，就有

$$\begin{aligned} G(x,x') &= c_1\sin kx + c_2\cos kx + \frac{\cos kx}{k}\int_0^x \sin k\xi\,\delta(\xi - x')\mathrm{d}\xi + \\ &\quad \frac{\sin kx}{k}\int_x^a \cos k\xi\,\delta(\xi - x')\mathrm{d}\xi \\ &= \sin kx\left[c_1 + \frac{\cos kx'}{k}H(x'-x)\right] + \cos kx\left[c_2 + \frac{\sin kx'}{k}H(x-x')\right] \end{aligned}$$

由边界条件 $G|_{x=0} = 0$ 可知 $c_2 = 0$；又由 $G|_{x=a} = 0$，有 $c_1\sin ka + \cos ka\,\dfrac{\sin kx'}{k} = 0$，故 $c_1 = -\dfrac{\sin kx'}{k\tan ka}$。于是

$$\begin{aligned} G(x,x') &= -\frac{\sin kx'}{k\tan ka}\sin kx + \frac{1}{k}\sin kx\cos kx' H(x'-x) + \frac{1}{k}\cos kx\sin kx' H(x-x') \\ &= -\frac{\sin kx'}{k\tan ka}\sin kx + \frac{1}{k}\begin{cases} \sin kx\cos kx' & (0 \leqslant x < x') \\ \cos kx\sin kx' & (x' < x \leqslant a) \end{cases} \\ &= \frac{1}{k\sin ka}\begin{cases} \sin kx\sin k(a-x') & (0 \leqslant x \leqslant x') \\ \sin kx'\sin k(a-x) & (x' \leqslant x \leqslant a) \end{cases} \end{aligned}$$

此即边值问题(10-2-8)中 $G(x,x')$ 的有限形式，它与例 10-2-1 中得到的无穷级数等价，二者在奇点 x' 处都是连续的。

10.2.3 用镜像法求格林函数

对泊松方程的第一类边值问题而言，其格林函数可用镜像法来求。在下面的讨论中，我们假定读者已经学习过电磁学的基础课程，已经熟悉了镜像法。

分三种情况讨论。

① 平界面半无限空间

设格林函数满足如下定解问题：

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad (x>0)\\ G|_{x=0}=0\end{cases} \tag{10-2-12}$$

其中 $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$ 是在半无限空间 $x>0$ 中的一点。

为解此问题，设

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_\infty(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\widetilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{10-2-13}$$

其中 G_∞ 在整个无限空间中满足方程

$$\nabla^2 G_\infty(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{10-2-14}$$

由式(10-1-12)和式(10-1-13)可知

$$G_\infty(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{4\pi R} \tag{10-2-15}$$

因为无限空间中位于 $\boldsymbol{r}'$ 处电量为 q 的静止点电荷在 $\boldsymbol{r}$ 处引起的静电位为

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

故 G_∞ 可视为 $\boldsymbol{r}'$ 处电量为 ε 的点电荷在 $\boldsymbol{r}$ 处引起的静电位。

将式(10-2-13)和式(10-2-14)代入式(10-2-12)，可知 $\widetilde{G}$ 满足以下定解问题：

$$\begin{cases}\nabla^2 \widetilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0 \quad (x>0)\\ \widetilde{G}|_{x=0}=-G_\infty|_{x=0}\end{cases} \tag{10-2-16}$$

由此可知，$\widetilde{G}$ 是位于 $x<0$ 处的电荷在 $x>0$ 空间内激发的电位，它在界面 $x=0$ 上引起的电位恰与 $\boldsymbol{r}'$ 处电量为 ε 的点电荷所引起的电位相抵消。因此，引起电位 $\widetilde{G}$ 的电荷是点电荷 ε 在 $x<0$ 处的镜像电荷 $-\varepsilon$。

根据电磁学的镜像法知识，可知

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi\xi} \tag{10-2-17}$$

这里 ξ 为镜像电荷与场点 P 之间的距离，如图 10-2-1 所示。

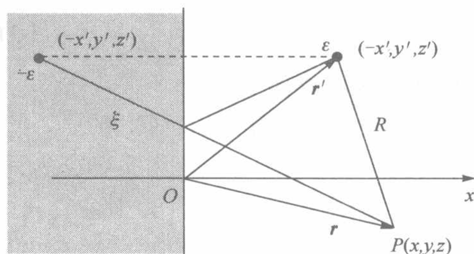


图 10-2-1 镜像电荷 $-\varepsilon$ 的位置

综合以上，即可得到

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\xi}\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right] \tag{10-2-18}$$

② 圆柱形区域内部

设在一半径为 a 的圆柱形区域中有

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') & (\rho<a)\\ G|_{\rho=a}=0\end{cases} \tag{10-2-19}$$

这里 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\rho}'$ 都是二维矢径。

令

$$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=G_\infty(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')+\widetilde{G}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') \tag{10-2-20}$$

并设 G_∞ 满足

$$\nabla^2 G_\infty(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') \tag{10-2-21}$$

则由式(10-1-14)可知

$$G_\infty(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|} \tag{10-2-22}$$

这可看成是由一根线电荷密度为 ε,位于 $\boldsymbol{\rho}'$ 处的无限长带电线在无限空间内引起的电位。

把式(10-2-20)和式(10-2-21)代入式(10-2-19),可知 $\widetilde{G}$ 满足下面的定解问题:

$$\begin{cases}\nabla^2 \widetilde{G}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=0 & (\rho<a)\\ \widetilde{G}|_{\rho=a}=-G_\infty|_{\rho=a}\end{cases} \tag{10-2-23}$$

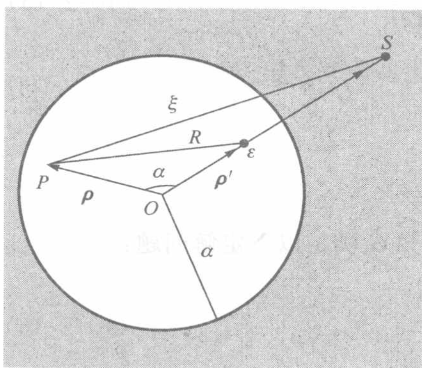


图 10-2-2　圆柱区域与像电荷

由此知 $\widetilde{G}$ 是位于 $\rho>a$ 的圆外区域内的电荷在圆柱内引起的电位,它在界面 $\rho=a$ 上与由柱内线电荷 ε 引起的电位相抵消。因此 $\widetilde{G}$ 的源是柱内线电荷 ε 在柱外的镜像线电荷,由对称性可知它应位于 $\boldsymbol{\rho}'$ 的延长线上某点 S 处,如图 10-2-2 所示。由镜像法知

$$\widetilde{G}=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho'\xi} \tag{10-2-24}$$

这里 ξ 为像电荷线与场点 P 之间的距离。

综合式(10-2-20)、式(10-2-22)和式(10-2-24),就得到了问题(10-2-19)的解:

$$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho'\xi}{aR} \tag{10-2-25}$$

③ 球形区域内部

设定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') & (r<a)\\ G|_{r=a}=0\end{cases} \tag{10-2-26}$$

先将解写为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_\infty(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\widetilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{10-2-27}$$

其中

$$G_{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi R} \tag{10-2-28}$$

这里 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$。于是 $\widetilde{G}$ 满足

$$\begin{cases}\nabla^2\widetilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0 \quad (r<a)\\ \widetilde{G}\Big|_{r=a}=-G_{\infty}\Big|_{r=a}=-\dfrac{1}{4\pi R}\Big|_{r=a}\end{cases} \tag{10-2-29}$$

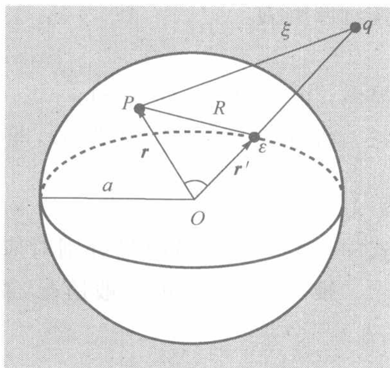


图 10-2-3　球形区域与像电荷

仍把 G_{∞} 视为位于 $\boldsymbol{r}'$ 处的点电荷 ε 在无界空间中 $\boldsymbol{r}$ 处引起的电位，则 $\widetilde{G}$ 就是点电荷 ε 关于球面 $r=a$ 的镜像电荷 q 在 $\boldsymbol{r}$ 处引起的电位。由对称性知 q 在 $\boldsymbol{r}'$ 的延长线上，如图 10-2-3 所示。由球面镜像法可知，在球内的场点 P，

$$\widetilde{G}=-\frac{a}{4\pi r'\xi} \tag{10-2-30}$$

其中 ξ 为镜像电荷 q 与场点 P 的距离。

综合式(10-2-27)、式(10-2-28)和式(10-2-30)，就得到本问题的格林函数：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R}-\frac{a}{r'\xi}\right) \tag{10-2-31}$$

10.3　无界稳恒波动问题中的格林函数

在稳恒波动方程

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{10-3-1}$$

中，$\psi(\boldsymbol{r},t)$ 表示由角频率为 ω 的源激起的场，而 $f(\boldsymbol{r})$ 代表源的空间分布，它不随时间而变。c 为波速，是常数。

设 $\psi(\boldsymbol{r},t)=u(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，代入式(10-3-1)，可知 $u(\boldsymbol{r})$ 满足方程(10-1-1)，于是相应的格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足方程(10-1-4)。

有界空间中求格林函数的方法前面已经讨论过了，在那里，格林函数是一些驻波(参见 10.2 节例 10-2-1)。对于无界空间，格林函数则一般具有行波形式。

10.3.1　三维格林函数　亥姆霍兹积分

先考虑 $\boldsymbol{r}'=0$，即点状源位于原点的情况，此时原点为方程的奇点。显然，这时的场为球对称，故取球坐标系 (r,θ,φ)。在球对称情况下，G 与 θ、φ 无关：$G=G(r)$，故式(10-1-4)可以写为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right)+k^2G=-\delta(r) \tag{10-3-2}$$

我们已经知道，在 $r\sim0$ 处，$G\sim\dfrac{1}{4\pi r}$。为求适合于任何 r 的 $G(r)$，设

$$G(r)=\frac{1}{4\pi r}g(r) \tag{10-3-3}$$

并要求当 $r\to 0$ 时，$g(r)\to 1$。把式(10-3-3)代入式(10-3-2)，可知 $g(r)$满足方程

$$g''(r)+k^2g=0 \quad (r\neq 0) \tag{10-3-4}$$

其行波解为

$$g(r)=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kr} \tag{10-3-5}$$

显然，当 $r\to 0$ 时，$g(r)\to 1$。

将 $g(r)$代入式(10-3-3)，即得

$$G(r)=\frac{1}{4\pi r}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kr} \tag{10-3-6}$$

式中指数上的两种符号分别对应于离开点源的扩展球面波和朝向点源的会聚球面波。

推广到 $\boldsymbol{r}'\neq 0$ 的一般情况，就有

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi R}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kR} \tag{10-3-7}$$

将式(10-3-7)代入式(10-1-26)，就得到辐射问题中常见的亥姆霍兹积分：

$$u(\boldsymbol{r})=\oiint_S\left[\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kR}}{4\pi R}\frac{\partial u}{\partial n}-u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kR}}{4\pi R}\right]\mathrm{d}S'+\iiint_V f(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kR}}{4\pi R}\mathrm{d}V' \tag{10-3-8}$$

10.3.2 三维格林函数的级数形式

除上面的表示外，还可以将三维格林函数表示为球坐标系中的无穷级数。

记场点的坐标为 $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\varphi)$，点源的坐标为 $\boldsymbol{r}'=(r',\theta',\varphi')$，则格林函数的方程(10-1-4)写为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\hat{L}^2G+k^2G=-\frac{\delta(r-r')}{r^2}\frac{\delta(\theta-\theta')}{\sin\theta}\delta(\varphi-\varphi') \tag{10-3-9}$$

其中

$$\hat{L}^2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{10-3-10}$$

由式(6-6-2)可知球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$满足下面的方程：

$$\hat{L}^2Y_{lm}=-l(l+1)Y_{lm} \tag{10-3-11}$$

先把方程(10-3-9)右边函数的角度部分用球谐函数展开。设

$$\frac{\delta(\theta-\theta')}{\sin\theta}\delta(\varphi-\varphi')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{10-3-12}$$

此式两边同乘以 $Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，对整个立体角积分，并利用球谐函数的正交归一关系式(6-6-7)，可得

$$\text{左边}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=Y^*_{l'm'}(\theta',\varphi')$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_{lm}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_{lm}\delta_{ll'}\delta_{mm'}=c_{l'm'}\end{aligned}$$

比较两边，即有

$$c_{lm}=Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi') \tag{10-3-13}$$

代入式(10-3-12)，得

$$\frac{\delta(\theta-\theta')}{\sin\theta}\delta(\varphi-\varphi')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{10-3-14}$$

现在求方程(10-3-9)的解。根据式(10-3-14)，可设

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_{l}(r,r')Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{10-3-15}$$

其中 $g_l(r,r')$ 待定。

将式(10-3-14)和式(10-3-15)代入方程(10-3-9)，并利用式(10-3-11)，可知 $g_l(r,r')$ 满足方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g_l}{\partial r}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]g_l=-\frac{\delta(r-r')}{r^2} \tag{10-3-16}$$

该方程可按公式(10-2-10)求解，其中 $f(r)=-\dfrac{\delta(r-r')}{r^2}$。

首先，式(10-3-16)相应的齐次方程是以 kr 为宗量的 l 阶球贝塞尔方程(只需作变换 $\zeta=kr$，然后与式(8-1-2)对比即可得知)，故齐次方程的两个线性独立解可取为

$$y_1(r)=\mathrm{j}_l(kr) \tag{10-3-17}$$

$$y_2(r)=\mathrm{h}_l^{(2)}(kr)=\mathrm{j}_l(kr)-\mathrm{i}\mathrm{n}_l(kr) \tag{10-3-18}$$

这里取第二解为 $\mathrm{h}_l^{(2)}(kr)$ 是为了得到向外的行波(设时间因子为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$)。由此又有

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\mathrm{j}_l(kr) & \mathrm{h}_l^{(2)}(kr)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{j}_l(kr) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{h}_l^{(2)}(kr)\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}\mathrm{J}_l & \mathrm{h}_l^{(2)}\\ \mathrm{j}'_l(\zeta) & \mathrm{h}_l^{(2)\prime}(\zeta)\end{vmatrix}$$

$$=k\begin{vmatrix}\mathrm{j}_l & \mathrm{j}_l-\mathrm{i}\mathrm{n}_l\\ \mathrm{j}'_l & \mathrm{j}'_l-\mathrm{i}\mathrm{n}'_l\end{vmatrix}=-\mathrm{i}kW(\mathrm{j}_l,\mathrm{n}_l)$$

利用公式(8-3-1)和公式(8-2-17)，即

$$\mathrm{j}_l(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(\zeta),\quad \mathrm{n}_l(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}(\zeta),\quad W(\mathrm{J}_l,\mathrm{N}_l)=\frac{2}{\pi\zeta}$$

可得

$$W(\mathrm{j}_l,n_l)=\frac{1}{\zeta^2} \tag{10-3-19}$$

故有

$$W(y_1,y_2)=-\frac{\mathrm{i}}{kr^2} \tag{10-3-20}$$

代入式(10-2-10)，并令 $y=g_l(r,r')$，$a=0$，$b=\infty$，可得

$$g_l(r,r')=c_1\mathrm{j}_l(kr)+c_2\mathrm{h}_l^{(2)}(kr)-\mathrm{i}k\mathrm{h}_l^{(2)}(kr)\int_0^r\mathrm{j}_l(k\xi)\delta(\xi-r')\mathrm{d}\xi-$$

$$\mathrm{i}k\mathrm{j}_l(kr)\int_r^{\infty}\mathrm{h}_l^{(2)}(k\xi)\delta(\xi-r')\mathrm{d}\xi \tag{10-3-21}$$

因为 $\mathrm{n}_l(\zeta)$ 在 $\zeta\to 0$ 处发散，故

$$\mathrm{h}_l^{(2)}(kr)\sim\mathrm{n}_l(kr)\to\infty\quad(\text{当 } r\to 0) \tag{10-3-22}$$

而 $g_l(0,r')$ 应当有限，故应取 $c_2=0$。又因为 $r\to\infty$ 时，

$$\mathrm{j}_l(kr)\sim\frac{1}{kr}\cos\left[kr-(l+1)\frac{\pi}{2}\right] \tag{10-3-23}$$

此为驻波表达式，而单一点源在无限空间中不会引起驻波，故又应取 $c_1=0$。于是式(10-3-21)给出

$$\begin{aligned}g_l(r,r')&=-\mathrm{i}k[\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{h}_l^{(2)}(kr')H(r'-r)+\mathrm{h}_l^{(2)}(kr)\mathrm{j}_l(kr')H(r-r')]\\&=-\mathrm{i}k\begin{cases}\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{h}_l^{(2)}(kr') & (0<r<r')\\ \mathrm{h}_l^{(2)}(kr)\mathrm{j}_l(kr') & (r>r')\end{cases}\end{aligned} \tag{10-3-24}$$

代入式(10-3-15)，即得

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\mathrm{i}k\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)\begin{cases}\mathrm{h}_l^{(2)}(kr)\mathrm{j}_l(kr') & (r>r')\\ \mathrm{j}_l(kr)\mathrm{h}_l^{(2)}(kr') & (r<r')\end{cases} \tag{10-3-25}$$

对于点源在原点的情况，$r'=0$，场为球对称，$G(\boldsymbol{r},0)$ 与 θ、φ 无关，故 $l=0,m=0$。因为 $\mathrm{j}_0(0)=1$〔见式(8-3-7)〕，而 $Y_{00}=1/\sqrt{4\pi}$，故式(10-3-25)给出

$$G(\boldsymbol{r},0)=-\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\mathrm{h}_0^{(2)}(kr)=-\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}[\mathrm{J}_{1/2}(kr)-\mathrm{i}\mathrm{N}_{1/2}(kr)]$$

利用式(8-2-35)和式(8-2-37)，上式可写为

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},0)&=-\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}(\sin kr+\mathrm{i}\cos kr)\\&=\frac{1}{4\pi r}(-\mathrm{i}\sin kr+\cos kr)=\frac{1}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\end{aligned}$$

这是由原点发出的球面波，与式(10-3-6)一致。

10.3.3　二维格林函数

若源沿 z 方向均匀分布，则场与坐标 z 无关，问题退化为二维，故可取平面极坐标 (ρ,φ) 进行讨论。

设源的坐标为 (ρ',φ')，则方程(10-1-4)写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}+k^2G=-\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}\delta(\varphi-\varphi') \tag{10-3-26}$$

很易验证，

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\quad(m=0,1,2,\cdots) \tag{10-3-27}$$

满足下面方程和正交归一关系：

$$\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial\varphi^2}=-m^2\Phi_m \tag{10-3-28}$$

$$\int_0^{2\pi}\Phi_m(\varphi)\Phi_{m'}^{*}(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\delta_{mm'} \tag{10-3-29}$$

由此易知下面的展式成立：

$$\delta(\varphi-\varphi')=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')} \tag{10-3-30}$$

现在将式(10-3-30)代入方程(10-3-26)的右边,并设

$$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(\rho,\rho')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')} \tag{10-3-31}$$

则可知 $g_m(\rho)$满足方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)g_m=-\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \tag{10-3-32}$$

下面按公式(10-2-10)求此方程的解。

与方程(10-3-32)相应的齐次方程为 m 阶的贝塞尔方程:

$$\frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\zeta\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}\zeta}\right)+\left(1-\frac{m^2}{\zeta^2}\right)g_m=0 \quad (\zeta=k\rho) \tag{10-3-33}$$

为得到外行波,取其两个线性独立解为

$$y_1(\rho)=\mathrm{J}_m(k\rho),\quad y_2(\rho)=\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho)$$

利用

$$\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho)=\mathrm{J}_m(k\rho)-\mathrm{i}\mathrm{N}_m(k\rho),\quad W(\mathrm{J}_l,\mathrm{N}_l)=\frac{2}{\pi k\rho}$$

可得

$$W(y_1(\rho),y_2(\rho))=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi k\rho} \tag{10-3-34}$$

于是按式(10-2-10)〔注意现在 $f(\xi)=-\dfrac{\delta(\xi-\rho')}{\xi}$〕可得

$$g_m(\rho,\rho') = c_1\mathrm{J}_m(k\rho)+c_2\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho)-\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho)\int_0^\rho\frac{\mathrm{J}_m(k\xi)}{W(\xi)}\frac{\delta(\xi-\rho')}{\xi}\mathrm{d}\xi-$$
$$\mathrm{J}_m(k\rho)\int_\rho^\infty\frac{\mathrm{H}_m^{(2)}(k\xi)}{W(\xi)}\frac{\delta(\xi-\rho')}{\xi}\mathrm{d}\xi \tag{10-3-35}$$

与式(10-3-21)同样讨论,可知应取 $c_1=0,c_2=0$。于是得

$$\begin{aligned}g_m(\rho,\rho')&=-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}[\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho)\mathrm{J}_m(k\rho')H(\rho-\rho')+\mathrm{J}_m(k\rho)\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho')H(\rho'-\rho)]\\&=-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}\begin{cases}\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho)\mathrm{J}_m(k\rho') & (\rho>\rho')\\ \mathrm{J}_m(k\rho)\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho') & (\rho<\rho')\end{cases}\end{aligned} \tag{10-3-36}$$

代入式(10-3-31),即得

$$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=-\frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\begin{cases}\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho)\mathrm{J}_m(k\rho') & (\rho>\rho')\\ \mathrm{J}_m(k\rho)\mathrm{H}_m^{(2)}(k\rho') & (\rho<\rho')\end{cases} \tag{10-3-37}$$

特别地,若线状源沿 z 轴放置:$\rho'=0$,则场为轴对称,故 $m=0$。由式(10-3-37)即有

$$G(\boldsymbol{\rho},0)=-\frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{H}_0^{(2)}(k\rho) \tag{10-3-38}$$

这是垂直于轴线向外传播的柱面波。

10.4 含时格林函数

前面所讨论的是稳恒波动问题的格林函数。那是定态问题,其时间变化关系可以简单

地表示为 $e^{i\omega t}$。在那里，源和场的空间分布都不随时间变化，因此格林函数仅是空间坐标的函数。现在我们要讨论的是源的空间分布也随时间变化时所激发的场。这类问题同样可以用格林函数进行分析，但这时的格林函数就与时间有关了。

10.4.1 含时格林函数的定义

考虑如下的有源波动问题：

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\boldsymbol{r},t)=-f(\boldsymbol{r},t) \tag{10-4-1}$$

其中 $f(\boldsymbol{r},t)$代表源的空间分布和时间变化情况，c 为波速，是常数。

为求方程(10-4-1)的解，可先利用 δ 函数，将 $f(\boldsymbol{r},t)$表示为

$$f(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t \mathrm{d}t'\delta(t-t')\iiint\limits_{\infty}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}V' \tag{10-4-2}$$

这里 $t>t'$。再设

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t \mathrm{d}t'\iiint\limits_{\infty}f(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}V' \tag{10-4-3}$$

把式(10-4-2)和式(10-4-3)代入式(10-4-1)，即有

$$\begin{aligned}&\int_0^t \mathrm{d}t'\iiint\limits_{\infty}f(\boldsymbol{r}';t')\left(\nabla^2+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}V'\\ =&-\int_0^t \mathrm{d}t'\delta(t-t')\iiint\limits_{\infty}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

因为上式对于任意给定的 $f(\boldsymbol{r}',t')$都成立，故有

$$\nabla^2 G-\frac{1}{c^2}\ddot{G}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{10-4-4}$$

这里 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$称为含时格林函数，上面加··表示对时间 t 求二阶导数，下同。显然，求解方程(10-4-1)就转化为求解 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$。

把 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$看成是由位于 $\boldsymbol{r}'$处的点源在 t'时刻发出，而在 t 时刻才传到 $\boldsymbol{r}$ 处的振动，则按照因果律，显然应有 $G(\boldsymbol{r},t<t';\boldsymbol{r}',t')=0$。另外，作为格林函数，$G$ 还应满足齐次边界条件。

把上述概括起来，可以这样定义含时格林函数：相应于定解问题

$$\begin{cases}(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\psi(\boldsymbol{r},t)=-f(\boldsymbol{r},t)\quad(\boldsymbol{r}\in V) & (10\text{-}4\text{-}5)\\ \left[\alpha(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial\psi}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r},t)\psi\right]_S=h(\boldsymbol{r}_S,t) & (10\text{-}4\text{-}6)\\ \psi|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{r}),\quad \dot{\psi}|_{t=0}=\xi(\boldsymbol{r}) & (10\text{-}4\text{-}7)\end{cases}$$

的格林函数 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$是下面定解问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 G-\frac{1}{c^2}\ddot{G}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\quad(\boldsymbol{r}\in V) & (10\text{-}4\text{-}8)\\ \left[\alpha(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial G}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r},t)G\right]_S=0 & (10\text{-}4\text{-}9)\\ G|_{t<t'}=0 & (10\text{-}4\text{-}10)\end{cases}$$

这里 S 是区域 V 的界面，$\boldsymbol{r}_S$ 是 S 面上点的位矢。

10.4.2 互易关系

$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$满足如下的互易关系：

$$G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}',t')=G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r}_1,-t_1) \tag{10-4-11}$$

该式的物理意义是，于t'时刻从$\boldsymbol{r}'$处的点源出发的振动在$t_1(>t')$时刻到达$\boldsymbol{r}_1$处，而于$-t_1$时刻从$\boldsymbol{r}_1$处的点源出发的振动则在$-t'(>-t_1)$时刻到达$\boldsymbol{r}'$处，两个振动引起的效果相同。不仅如此，两个振动传播的时间也相等：前者是t_1-t'，后者是$(-t')-(-t_1)=t_1-t'$。

注意，式(10-4-11)不能写成$G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}',t')=G(\boldsymbol{r}',t';\boldsymbol{r}_1,t_1)$，因为按照因果律，若$t'<t_1$，则$G(\boldsymbol{r}',t';\boldsymbol{r}_1,t_1)=0$。

现在证明互易关系。按以上对$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$的理解，考虑另一个函数$\widetilde{G}$，它是由$\boldsymbol{r}_1$处的源在$-t_1$时刻发出，而在$-t(>-t_1)$时刻在$\boldsymbol{r}$处引起的振动，即

$$\widetilde{G}=G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1) \tag{10-4-12}$$

按式(10-4-8)，$\widetilde{G}$应满足以下方程：

$$\nabla^2\widetilde{G}-\frac{1}{c^2}\ddot{\widetilde{G}}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\delta(t-t_1) \tag{10-4-13}$$

这里已利用了$\delta[(-t)-(-t_1)]=\delta(t_1-t)=\delta(t-t_1)$。

由延迟关系式(10-4-10)可知，$\widetilde{G}$的初始条件为

$$\widetilde{G}|_{-t<-t_1}=\widetilde{G}|_{t>t_1}\equiv 0 \tag{10-4-14}$$

齐次边界条件与t无关，故$\widetilde{G}$的边界条件与式(10-4-9)相同，不另写出。

以$\widetilde{G}$乘式(10-4-8)，以G乘式(10-4-13)，所得两式相减，得

$$\begin{aligned}&(\widetilde{G}\,\nabla^2G-G\,\nabla^2\widetilde{G})-\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{G}\dot{G}-G\dot{\widetilde{G}})\\&\quad=-\widetilde{G}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')+G\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\delta(t-t_1)\end{aligned} \tag{10-4-15}$$

先将此式对t从$-\infty$到$\tau(>t'$和$t_1)$积分，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}(\widetilde{G}\dot{G}-G\dot{\widetilde{G}})\Big|_{-\infty}^{\tau}&=\int_{-\infty}^{\tau}(\widetilde{G}\,\nabla^2G-G\,\nabla^2\widetilde{G})\mathrm{d}t+\\&\quad[\widetilde{G}\,|_{t=t'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-G\,|_{t=t_1}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)]\end{aligned} \tag{10-4-16}$$

因为$\tau>t_1$，即$-\tau<-t_1$，故由式(10-4-14)知

$$\widetilde{G}|_{\tau}=G(\boldsymbol{r},-\tau;\boldsymbol{r}_1,-t_1)=0,\quad \dot{\widetilde{G}}|_{\tau}=0$$

同理有

$$G|_{t=-\infty}=G(\boldsymbol{r},-\infty;\boldsymbol{r}',t')=0,\quad \dot{G}|_{-\infty}=0$$

所以，式(10-4-16)的左边为0。

此时再将式(10-4-16)对体积V积分。利用第二格林公式

$$\iiint_V[u\,\nabla^2v-v\,\nabla^2u]\mathrm{d}V=\oiint_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

可得

$$\int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}t \oiint_S \mathrm{d}S\left(\widetilde{G}\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial n}\right) = G\,|_{t=t_1,\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1} - \widetilde{G}\,|_{t=t',\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'}$$

$$= G(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}', t') - \widetilde{G}(\boldsymbol{r}', -t'; \boldsymbol{r}_1, -t_1) \qquad (10\text{-}4\text{-}17)$$

在 S 面上，G 和 $\widetilde{G}$ 满足相同的边界条件，故 $\widetilde{G}\dfrac{\partial G}{\partial n} = G\dfrac{\partial \widetilde{G}}{\partial n}$，从而式(10-4-17)左边为 0。至此，式(10-4-11)得证。

10.4.3 含时边值问题的一般解

在式(10-4-5)和式(10-4-7)中把$(\boldsymbol{r},t)$换为$(\boldsymbol{r}',t')$，则有

$$\nabla'^2\psi(\boldsymbol{r}',t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'^2} = -f(\boldsymbol{r}',t') \quad (\boldsymbol{r}' \in V) \qquad (10\text{-}4\text{-}18)$$

$$\psi(\boldsymbol{r}',t')|_{t'=0} = \varphi(\boldsymbol{r}'), \quad \dot{\psi}'(\boldsymbol{r}',t')|_{t'=0} = \xi(\boldsymbol{r}') \qquad (10\text{-}4\text{-}19)$$

这里 $\dot{\psi}'$表示对t'求导。在式(10-4-8)、式(10-4-10)中作下述互换：

$$\boldsymbol{r} \leftrightarrow \boldsymbol{r}', \quad t \leftrightarrow -t' \qquad (10\text{-}4\text{-}20)$$

此时 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') \to G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t)$，根据互易关系式(10-4-11)可知，互换后 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$不变，故式(10-4-8)在互换后写为

$$\nabla'^2 G - \frac{1}{c^2}\ddot{G}' = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \quad (\boldsymbol{r}' \in V) \qquad (10\text{-}4\text{-}21)$$

而 $t<t'$这一关系在式(10-4-20)的变换下保持不变，故式(10-4-10)不变。

以 G 乘式(10-4-18)两边，以 $\psi(\boldsymbol{r}',t')$乘式(10-4-21)两边，前者减后者，然后对 t'从 0 到 $t^+(=t+\varepsilon,\varepsilon\to 0)$积分。注意到

$$\int_0^{t^+} \psi(\boldsymbol{r}',t')\delta(t-t')\mathrm{d}t' = \psi(\boldsymbol{r}',t)$$

即有

$$\frac{1}{c^2}(G\dot{\psi}' - \psi\dot{G}')\Big|_{t'=0}^{t'=t^+} = \int_0^{t^+}\left[G\nabla'^2\psi - \psi\nabla'^2 G + Gf(\boldsymbol{r}',t')\right]\mathrm{d}t' - \psi(\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$(10\text{-}4\text{-}22)$$

式中 $G=G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$，除最后一项外，$\psi=\psi(\boldsymbol{r}',t')$。

因为 $t^+>t$，根据式(10-4-10)，有 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'=t^+)=0$，进而又有 $\dot{G}'(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'=t^+)=0$，故式(10-4-22)左边的上限值代入后为 0。再根据式(10-4-19)，可知左边的下限值代入后为

$$-\frac{1}{c^2}\left[\xi(\boldsymbol{r}')G|_{t'=0} - \varphi(\boldsymbol{r}')\dot{G}'|_{t'=0}\right]$$

这样，以 $\boldsymbol{r}'$为积分变量，将式(10-4-22)对 V 积分，利用第二格林公式，即有

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \int_0^t\left[\iiint_V \mathrm{d}V' G f(\boldsymbol{r}',t') + \oiint_S \mathrm{d}S'\left(G\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\right]\mathrm{d}t' +$$

$$\frac{1}{c^2}\int_V \mathrm{d}V'\left[\xi(\boldsymbol{r}')\,G\,|_{t'=0} - \varphi(\boldsymbol{r}')\dot{G}'\,|_{t'=0}\right] \qquad (10\text{-}4\text{-}23)$$

这里已将对 t'的积分上限简单地写为 t。

在前述变量替换之下，边界条件式(10-4-6)和式(10-4-9)成为

$$\left[\alpha(\boldsymbol{r}',t')\frac{\partial\psi}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r}',t')\psi\right]_S=h(\boldsymbol{r}_S',t') \tag{10-4-24}$$

$$\left[\alpha(\boldsymbol{r}',t')\frac{\partial G}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r}',t')G\right]_S=0 \tag{10-4-25}$$

以$G|_S$乘式(10-4-24)，以$\psi|_S$乘式(10-4-25)，两式相减，得

$$\left[G\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial G}{\partial n}\right]_S=\left[\frac{h(\boldsymbol{r}',t')}{\alpha(\boldsymbol{r}',t')}G\right]_S$$

代入式(10-4-23)，就得到了定解问题式(10-4-5)～式(10-4-7)的一般解：

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t\left[\int_V \mathrm{d}V'Gf(\boldsymbol{r}',t')+\oint_S \mathrm{d}S'\frac{h(\boldsymbol{r}',t')}{\alpha(\boldsymbol{r}',t')}G\right]\mathrm{d}t'+$$
$$\frac{1}{c^2}\int_V \mathrm{d}V'\left[\xi(\boldsymbol{r}')G|_{t'=0}-\varphi(\boldsymbol{r}')\dot{G}'|_{t'=0}\right] \tag{10-4-26}$$

10.4.4 有界空间的含时格林函数

由上可知，求解含时定解问题的关键在于含时的格林函数。有界空间的含时格林函数仍可表示为本征函数的级数，但展开系数与时间有关，这需要借助于傅里叶变换导出。

对格林函数 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$做傅里叶变换，有

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}',\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} \tag{10-4-27}$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\widetilde{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')} \tag{10-4-28}$$

将式(10-4-28)代入式(10-4-8)和式(10-4-9)，并利用

$$\delta(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega$$

则可知像函数$\widetilde{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}',\omega)$应是下述边值问题的解：

$$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)\widetilde{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}',\omega)=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\[2ex] \left[\alpha(\boldsymbol{r},t)\dfrac{\partial\widetilde{G}}{\partial n}+\beta(\boldsymbol{r},t)\widetilde{G}\right]_S=0\end{cases} \tag{10-4-29}$$

式中 $k=\omega/c$。假定该问题的本征函数族为$\{\psi_n(\boldsymbol{r})\}$，本征值为$\{k_n\}$，$k_n=\omega_n/c$，则与 10.2 节中同样分析，可得

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}',\omega)=\frac{c^2}{\sqrt{2\pi}}\sum_n\frac{\psi_n^*(\boldsymbol{r}')}{\omega_n^2-\omega^2}\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{10-4-30}$$

代入式(10-4-28)，有

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{c^2}{2\pi}\sum_n\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}}{\omega_n^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega \tag{10-4-31}$$

式中被积函数在 $\omega=\pm\omega_n$ 有极点，可用留数定理求出积分。

为得到 $t>t'$时的结果，根据式(2-4-11)，积分路径应改变为包围下半平面的半圆。又考虑到必须满足初条件式(10-4-10)，即$G|_{t<t'}=0$，故沿实轴的积分应从上方绕过极点

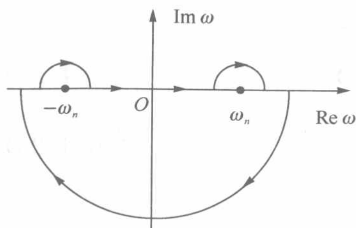


图 10-4-1 式(10-4-31)中的积分路径

$\pm\omega_n$，如图 10-4-1 所示。这是因为，当 $t<t'$ 时，包围下半平面的半圆改为包围上半平面，而极点 $\pm\omega_n$ 则被排除到回路之外，从而式(10-4-31)中各积分皆为 0。

根据留数定理，对上述积分回路，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_n^2-\omega^2}d\omega=-2\pi i\left[\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_n-\omega}\bigg|_{-\omega_n}-\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_n+\omega}\bigg|_{\omega_n}\right]$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_n}\sin\left[\omega_n(t-t')\right]$$

代入式(10-4-31)，并将 $G|_{t<t'}=0$ 这一条件明确包含到表达式中，就有

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\sum_n\frac{c^2}{\omega_n}\psi_n^*(\boldsymbol{r}')\psi_n(\boldsymbol{r})\sin\left[\omega_n(t-t')\right]H(t-t') \tag{10-4-32}$$

10.5 无界空间的含时格林函数

10.5.1 三维情况

格林函数代表点源引起的场。在无界的情况下，它显然仅与 $R\equiv|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 和 $(t-t')$ 有关，故可记 $G=G(R,t-t')$。于是方程(10-4-8)亦可写为

$$\nabla^2G-\frac{1}{c^2}\ddot{G}=-\delta(R)\delta(t-t') \tag{10-5-1}$$

在奇点 $R=0$ 附近，$\ddot{G}$ 与 ∇^2G 相比可忽略，方程近似于

$$\nabla^2G\approx-\delta(R)\delta(t-t')$$

由此得渐进式

$$G\approx\frac{1}{4\pi R}\delta(t-t')\quad（当\ R\sim0） \tag{10-5-2}$$

在 $R\neq0$ 处，方程(10-5-1)即

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2G}{\partial t^2}=\nabla^2G \tag{10-5-3}$$

显然，该式满足渐近条件式(10-5-2)的解就是方程(10-5-1)的解。

因为 $G(R,t-t')$ 关于 $R=0$(即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 这一点)为球对称，故若以 $\boldsymbol{r}'$ 为原点取球坐标系，便有

$$\nabla^2G=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right)=\frac{1}{R}\frac{\partial^2(RG)}{\partial R^2}$$

代入式(10-5-3)，有

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(RG)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2(RG)}{\partial R^2} \tag{10-5-4}$$

此为波动方程，波速为 c。由此知 G 的一般解可写为

$$G(R,t-t')=\frac{1}{R}\left\{f_1\left[\frac{R}{c}-(t-t')\right]+f_2\left[\frac{R}{c}+(t-t')\right]\right\} \tag{10-5-5}$$

其中 f_1、f_2 为任意函数。对格林函数有 $t>t'$，所以等号右边的第一项和第二项分别为以

$R=0$ 为中心的扩展球面波和会聚球面波。

对辐射波,应舍 f_2 而保留 f_1。考虑到应满足渐近条件式(10-5-2),可知应取 $f_1=\frac{1}{4\pi}\delta\left(\frac{R}{c}-(t-t')\right)$。于是有

$$G(R,t-t')=\frac{1}{4\pi R}\delta\left[\frac{R}{c}-(t-t')\right]\quad(t>t')\tag{10-5-6}$$

此即三维空间中的含时格林函数。式中的 δ 函数表明,仅当 $t=\frac{R}{c}+t'$ 时,G 才不为 0,因此式(10-5-6)表示 $G(R,t-t')$ 是在 t' 时刻由 $R=0$ 处发出,在经历时间 $t-t'$ 后,到达半径为 R 的球面的一个脉冲振动。对该球面,G 既无前效,也无后效。

【例 10-5-1】 求解无界空间的初值问题:

$$\begin{cases}\nabla^2\psi-\dfrac{1}{c^2}\ddot{\psi}(\boldsymbol{r},t)=-f(\boldsymbol{r},t)\\ \psi|_{t=0}=0,\quad \dot{\psi}|_{t=0}=0\end{cases}$$

解 按式(10-4-26),ψ 可由边界条件和初条件确定。对无界且初始条件为 0 的情况,注意到在无穷远处 G 为 0(因为 $t-t'$ 有限),从而面积分为 0,故有

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t \mathrm{d}t'\int_V \mathrm{d}V'G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')f(\boldsymbol{r}',t')$$

由式(10-5-6)可知

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left[\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}-(t-t')\right]$$

代入上式,先对 t' 积分,可得

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_\infty\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}f\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)$$

式(10-4-26)已假定 $t'\geqslant 0$,故上式中 $t\geqslant\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$,即 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leqslant ct$。所以积分域实际上是以 $\boldsymbol{r}$ 为中心,ct 为半径的球体 $\widetilde{V}$,如图 10-5-1 所示。于是上式可写为

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\widetilde{V}}\frac{\mathrm{d}V'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}f\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)$$

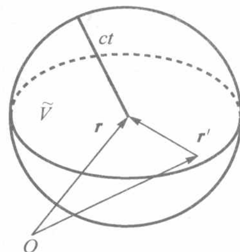


图 10-5-1 积分域 $\widetilde{V}$

该式的物理意义如下:t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处的振动是由在 $\widetilde{V}$ 内的全体点源 $\boldsymbol{r}'$ 在不同时刻发出,但都在 t 时刻到达 $\boldsymbol{r}$ 处的振动之和。具体地说,来自球面的振动经历了最长的传播时间 $\Delta t=R/c$,而其他在同一时刻到达 $\boldsymbol{r}$ 处的振动皆来自球内,它们的传播时间皆少于 R/c。

10.5.2 二维情况

二维问题中格林函数 $G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')$ 满足

$$\begin{cases}\nabla^2 G-\dfrac{1}{c^2}\ddot{G}=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\delta(t-t') \\ G|_{t<t'}=0\end{cases} \tag{10-5-7}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}$ 为垂直于 z 轴的平面矢量。

二维问题中的点源实际上是三维情况下平行于 z 轴均匀分布的无限长线源，而 $\boldsymbol{r}'$ 则是线源上 z' 处的点，故由点源格林函数(10-5-6)对 z' 积分，即可得到二维问题的格林函数。因此

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t') &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \frac{1}{4\pi R}\delta\left[\frac{R}{c}-(t-t')\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{z}^{\infty} \mathrm{d}z' \frac{1}{R}\delta\left[\frac{R}{c}-(t-t')\right] \quad (t>t') \end{aligned} \tag{10-5-8}$$

这里已注意到线源无限长，故以任一平面 $z=$常数为界，两边的源对积分的贡献都相同。

由 $R=\sqrt{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2+(z-z')^2}$，并考虑到积分中 $z'>z$，有

$$\frac{\mathrm{d}z'}{R}=-\frac{\mathrm{d}R}{z-z'}=\frac{\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}}$$

这样，式(10-5-8)写为

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t') &= \frac{1}{2\pi}\int_{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}^{\infty} \frac{\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}}\delta\left[\frac{R}{c}-(t-t')\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}R \frac{H(R-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)}{2\pi\sqrt{R^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}}\delta\left[\frac{R}{c}-(t-t')\right] \\ &= \frac{c}{2\pi}\frac{H[c(t-t')-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|]}{\sqrt{c^2(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}} \quad (t>t') \end{aligned} \tag{10-5-9}$$

这就是二维情况下的含时格林函数。

10.5.3 一维情况和达兰贝尔公式

一维问题中格林函数 $G(x,t;x',t')$ 满足

$$\begin{cases}\nabla^2 G-\dfrac{1}{c^2}\ddot{G}=-\delta(x-x')\delta(t-t') \\ G|_{t<t'}=0\end{cases} \tag{10-5-10}$$

一维情况下的点源实际上是三维空间中垂直于 x 轴的无限大均匀平面源，因此式(10-5-10)中的 G 应是式(10-5-6)对 y' 和 z' 的积分，而后者在前面已经完成，即式(10-5-9)，所以现在只需再将式(10-5-9)对 y' 积分，于是有

$$G(x,t;x',t')=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y' \frac{H[c(t-t')-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|]}{\sqrt{c^2(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}} \tag{10-5-11}$$

这里 $|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|=\sqrt{(x-x')^2+y'^2}$(在一维问题中，以 x 轴上的点代表空间任意一点，故 $y=0$)。

由式中的阶跃函数 H 可知，仅当 $c^2(t-t')^2-(x-x')^2>y'^2$ 时，积分才不为 0。记 $b=\sqrt{c^2(t-t')^2-(x-x')^2}$，则积分域可写为 $-b\leqslant y'\leqslant b$。在此积分域中，$H=1$，但注意到 b 为实数，这要求 $c^2(t-t')^2>(x-x')^2$。对 $t>t'$，则为 $c(t-t')>|x-x'|$，该条件可用 $H[c(t-t')-|x-x'|]$ 表示。因此上述积分可改写为

$$G(x,t;x',t') = \frac{c}{2\pi}\int_{-b}^{b} \mathrm{d}y' \frac{H[c(t-t')-|x-x'|]}{\sqrt{b^2-y'^2}}$$

利用

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{d}y' \frac{1}{\sqrt{b^2-y'^2}} = \arcsin\frac{y'}{b}\Big|_{-b}^{b} = \pi$$

得

$$G(x,t;x',t') = \frac{c}{2}H[c(t-t')-|x-x'|] \tag{10-5-12}$$

这就是一维情况下的含时格林函数。

对于无界的一维初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{1}{c^2}\ddot{\psi}(x,t)=0 \quad (-\infty<x<\infty)\\ \psi|_{t=0}=\varphi(x), \quad \dot{\psi}|_{t=0}=\xi(x)\end{cases} \tag{10-5-13}$$

把式(10-5-12)代入式(10-4-23)，并将对体积的积分改为对 x 的积分，注意到 $H'(x)=\delta(x)$，以及无界情况下面积分项不存在，则可得到

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\xi(x')\mathrm{d}x' \tag{10-5-14}$$

这正是熟知的达兰贝尔(d'Alembert)公式。

习　题　10

10.1　求三维无界空间辐射场问题(取时间因子为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$)的格林函数：

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

10.2　求下述问题的解(区域为半平面 $x>0$)：

$$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') \quad (x>0)\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\end{cases}$$

10.3　求下述问题的解：

$$\begin{cases}\ddot{G}(x,t)=c^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \quad (0<x<l)\\ G|_{x=0}=0, \quad G|_{x=l}=0\\ G|_{t=0}=0, \quad \dot{G}|_{t=0}=0\end{cases}$$

10.4　在半径为 a 的接地导体球壳内，沿直径放置一根长为 $2a$ 的均匀带电细线，线与球壳绝缘。假定线电荷总量为 Q，试用格林函数法求球内电势关于 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)(l=0,1,2,\cdots)$ 的级数表达式。

〔提示：球内电荷密度可表示为 $\rho(r,\theta,\varphi)=\dfrac{Q}{2\pi}\dfrac{\delta(\varphi)[\delta(\theta-0)+\delta(\theta-\pi)]}{r^2\sin\theta}$〕

第11章 变分法

在电磁分析中，有时需要将某个物理量表示为泛函，然后求其极值。例如天线的方向性系数就可以表示为泛函。在分析变折射率光纤时，也可以把传播常数表示为泛函。对泛函极值问题的研究导致了变分法的建立，因此泛函是变分法的最基本概念，也是变分法的研究对象。本章将首先介绍泛函与变分的概念，然后介绍用变分求泛函极值的主要方法，以及变分在边值问题中的应用。最后简要介绍变分原理及其与电磁理论的内在联系。

11.1 泛函与变分

11.1.1 泛函

泛函概念是函数概念的推广。我们知道，函数的定义域和值域都是数的集合。而泛函则是这样的一类函数：它们的定义域是满足一定条件的函数的集合(即函数空间)，而值域则仍是数的集合。为明确，我们用 $f\{x\}$(花括号)表示泛函关系，以区别于用 $f(x)$(圆括号)表示的普通函数关系。

例如，在 xy 平面上连接 a、b 两点的曲线长度为

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{11-1-1}$$

显然，l 与曲线的具体形状即具体的函数表达式 $y=y(x)$ 有关。所以，l 的定义域是所有描写连接 a、b 两点的平面曲线的连续函数，但它的值仍是数。因此 l 是泛函，可记为 $l\{y\}$。

一般地，泛函 $f\{x\}$ 可表示为下面的形式：

$$f\{x\} = \int_{t_1}^{t_2} F[x(t)]\,\mathrm{d}t \tag{11-1-2}$$

式中 $x(t)$ 是定义在区间 $[t_1, t_2]$ 上的连续函数，称为 $f\{x\}$ 的变函数，而 $F[x(t)]$ 则代表由 $x(t)$ 构成的某一种表达式。显然，$f\{x\}$ 的定义域是变函数 $x(t)$ 的全体，当选定一个具体的 $x(t)$ 后，$f\{x\}$ 才是确定的，它就是 $F[x(t)]$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上的积分值。

注意，即使 $x(t)$ 已被取定，泛函 $f\{x\}$ 也不同于复合函数 $f(x(t))$，因为后者与 t 有一一对应的关系，它仍是自变量 t 的函数，可简单地表示为 $g(t)$；而泛函 $f\{x\}$ 则是一个具体的

数，其值由$[t_1,t_2]$中的全体 t 决定。

泛函可以看做是有无穷多变量的函数，也可以看做是无穷维函数空间中的点的函数。这是因为，若令 $\Delta t=(t_2-t_1)/N, t_k=t_1+k\Delta t(k=0,1,\cdots,N-1), x_k=x(t_k)$，则按黎曼积分的概念，式(11-1-2)可写为

$$f\{x\} = \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} F(x_k)\right\}\Delta t \tag{11-1-3}$$

故 $f\{x\}$可看做是全体变量$\{x_k\}$的函数。

又若把 $x(t)$用某一组完备的函数组$\{\varphi_k(t)\}(t\in[t_1,t_2])$展开：$x(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(t)$，把全体 $\varphi_k(t)$ 看做是无穷维函数空间的一组正交基矢量，则 a_k 即为 $x(t)$在第 k 个坐标轴上的投影。于是，函数空间中的一个点就对应于一个确定的函数 $x(t)$。按式(11-1-2)，这就等于给定了一个泛函 $f\{x\}$。所以泛函又可以看做是无穷维函数空间中的点的函数。

若泛函的变函数包括 $x(t)$的各阶导数，则泛函可写为

$$f\{x\} = \int_{t_1}^{t_2} F[x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),\cdots]\mathrm{d}t \tag{11-1-4}$$

其中上面的黑点表示对 t 求导。

11.1.2 泛函的极值

为便于理解，仍以式(11-1-1)为例。因为两点间的曲线长度取决于曲线的形状，即取决于具体的变函数 $y(x)$，所以在连接 a、b 两点的全体 $y(x)$中必有一个能使 l 最小。这个使泛函 $l\{y\}$取极值的特别的 $y(x)$，就是 $l\{y\}$的极值点。

由此推广，对于泛函 $f\{x\}$而言，其极值点就是使 $f\{x\}$取极值的那个变函数 $x(t)$。对多变量泛函 $f\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$而言，其极值点则为一组变函数 $x_k(t), k=1,2,\cdots,n$。也就是说，泛函的极值点是函数空间中的点。

显然，确定极值点是求泛函极值的首要问题。变分法就是根据极值点应满足的必要条件，寻找所有可能的极值点的方法。对于物理问题而言，所找到的点是否真正的极值点，是极大点还是极小点，则需根据具体的物理内容进一步加以判断。

11.1.3 变分

我们知道，函数 $x(t)$的微分为 $\mathrm{d}x=x(t+\mathrm{d}t)-x(t)$，这是由于自变量的微小改变而引起的函数值的微小改变。变分(Variation)的概念与微分不同。设 $x_1(t)$和 $x_2(t)$是两个微有差异的函数〔例如在$|t|<0.5$区间内，$x_1(t)=t^2$ 与 $x_2(t)=1-\mathrm{e}^{-t^2}$ 只有微小的差异〕，则变分为 $\delta x=x_2(t)-x_1(t)$。

由于变分与微分都是微小的差，故二者的计算公式相同，例如，若 u 和 v 是两个函数，则有

$$\delta(u+v)=\delta u+\delta v \tag{11-1-5}$$

$$\delta(uv)=(\delta u)v+u(\delta v) \tag{11-1-6}$$

$$\delta\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{(\delta u)v-u(\delta v)}{v^2} \tag{11-1-7}$$

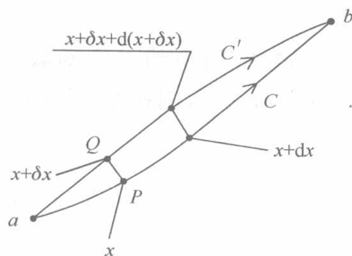


图 11-1-1　路径 C' 和 C''

变分与微分可以交换顺序，说明如下。

考虑图 11-1-1 中两条邻近并有相同端点的轨道 C 和 C'。C 为质点的真实运动轨道，方程为 $x=x(t)$。C' 不是真实轨道。设质点 P 沿 C 运动，并想象另一质点 Q 沿 C' 运动，它们同时从端点 a 出发，也同时到达端点 b。而且，在任何时刻，对 P 在 C 上的每一位置，Q 在 C' 上都应有唯一的位置与之对应。假定 t 时刻质点 P 位于 x 处，则因 C 和 C' 靠得很近，此时 Q 的坐标为可写为 $x+\delta x$。

若 $t+\mathrm{d}t$ 时刻 P 的位置为 $x+\mathrm{d}x$，则 Q 的位置可由两种方式确定。一种是由 P 在该时刻的位置确定：

$$(x+\mathrm{d}x)+\delta(x+\mathrm{d}x)=x+\mathrm{d}x+\mathrm{d}x+\delta(\mathrm{d}x)$$

另一种是由 Q 在 t 时刻的位置 $x+\delta x$ 确定：

$$(x+\delta x)+\mathrm{d}(x+\delta x)=x+\delta x+\mathrm{d}x+\mathrm{d}(\delta x)$$

因为结果应当唯一，故有 $\delta(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}(\delta x)$。因此，变分与微分可以交换次序。

但变分与求导一般不能交换次序。这很容易证明。按式(11-1-7)，有

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\delta(\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\delta x)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\delta t)}{\mathrm{d}t}$$

这就表明，变分和求导一般不能交换顺序，除非 $\delta t=0$。$\delta t=0$ 时的变分称为等时变分。

11.1.4　泛函的变分

为了后面的应用，这里假定 $f\{x\}$ 只与 $x(t)$ 及其一阶导数有关，即

$$f\{x\}=\int_{t_1}^{t_2}F[x(t),\dot{x}(t),t]\mathrm{d}t \tag{11-1-8}$$

若 $x(t)$ 的函数形式微有改变：$x\to x+\delta x$，则由式(11-1-8)有

$$\begin{aligned}f\{x+\delta x\}&=\int_{t_1}^{t_2}F\left[x+\delta x,\dot{x}+\frac{\mathrm{d}(\delta x)}{\mathrm{d}t},t\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{F(x,\dot{x},t)+\left[\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{\mathrm{d}(\delta x)}{\mathrm{d}t}\right]+\cdots\right\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这里已注意到是等时变分，故有 $\delta\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}(\delta x)}{\mathrm{d}t}$。由此可定义泛函的变分为

$$\delta f=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{\mathrm{d}(\delta x)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t \tag{11-1-9}$$

（严格地说，此应称为一阶变分，但因本书并不用到高阶变分，故可简称其为变分。）对第二项作分部积分，可进一步写出

$$\delta f=\int_{t_1}^{t_2}\delta x\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t+\left(\delta x\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} \tag{11-1-10}$$

11.2　泛函取极值的必要条件

我们知道，对于普通多变量函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 而言，其在点 $(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 附近的

微分是 $\mathrm{d}f=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{d}x_k\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x_0}$，这里下标 x_0 代表$(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$。若 x_0 为极值点，则有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x_0}=0(k=1,2,\cdots,n)$，所以在极值点有 $\mathrm{d}f=0$。此为函数取极值时应具备的必要条件。

泛函可视为函数空间的函数，因此泛函取极值的必要条件就是 $\delta f=0$。式(11-1-10)表明，δf 与边界条件有关，故泛函取极值的必要条件也与边界条件有关。下面分别讨论。

11.2.1 固定边界条件 欧拉变分方程

固定边界条件指变函数 $x(t)$在边界的值不可改变，即 $\delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0$。物理分析中遇到的变分问题多属此类。根据式(11-1-10)，因为 δx 任意，故 $\delta f=0$ 要求

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0 \tag{11-2-1}$$

此即欧拉(Euler)变分方程(也称欧拉-拉格朗日方程，简称 E-L 方程)。

若泛函也依赖于变函数的高阶导数，例如 $F=F[x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),t]$，则欧拉变分方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}=0 \tag{11-2-2}$$

证明留做习题。

不难推知，若泛函依赖于多个一元函数，例如

$$f\{x,y\}=\int_{t_1}^{t_2}F[x(t),\dot{x}(t),y(t),\dot{y}(t),t]\mathrm{d}t \tag{11-2-3}$$

其中各变函数在边界上皆取定值，则 $\delta f=0$ 等价于

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}}=0\end{cases} \tag{11-2-4}$$

此称欧拉变分方程组。

【例 11-2-1】 一个光滑的质点串在一条两端固定的曲线上，在静止状态下从线的一端出发，滑到另一端。求使滑动时间最短的曲线方程。

解 取坐标系如图 11-2-1 所示，坐标平面为铅垂面，原点和 A 点分别为下滑的始点和终点。设所求曲线方程为 $y=y(x)$。因为下滑时间取决于曲线 $y(x)$，故可把下滑时间表示为 y 的泛函 $T\{y\}$。于是本问题就成为固定边界条件下，寻找使泛函 $T\{y\}$取最小值的函数$y(x)$的问题。

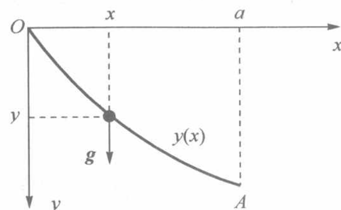


图 11-2-1 下滑曲线与坐标系

因为不计摩擦，故机械能守恒，由此知质点在曲线 $y=y(x)$上(x,y)处的滑动速率为 $v(x,y)=\sqrt{2gy(x)}$。于是下滑时间为

$$T\{y\}=\int\frac{\mathrm{d}s}{v(x,y)}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)}}\mathrm{d}x \tag{11-2-5}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为曲线微元，$\boldsymbol{g}$ 为重力加速度。与式(11-1-8)比较，可记

$$F[y(x),y'(x),x]=\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)}} \tag{11-2-6}$$

因为曲线的两端固定，故 F 应满足欧拉变分方程(11-2-1)，即

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \tag{11-2-7}$$

又由式(11-2-6)知 F 不显含 x，从而$\frac{\partial F}{\partial x}=0$，故有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \tag{11-2-8}$$

把式(11-2-7)代入式(11-2-8)，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

故

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C \tag{11-2-9}$$

C 为积分常数。把式(11-2-6)代入式(11-2-9)，得

$$\frac{1}{\sqrt{y(x)\{1+[y'(x)]^2\}}}=C \tag{11-2-10}$$

注意到在所取的坐标系中 $y'(x)>0$，则由式(11-2-10)可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{C_1}{y}-1}$$

其中 $C_1=1/C^2$。于是有

$$x=\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\mathrm{d}y \tag{11-2-11}$$

做变换 $y=C_1\sin^2\frac{t}{2}=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$，可求出积分：

$$x=\frac{C_1}{2}(t-\sin t)+C_2$$

初始时 $t=0,x=0,y=0$，故 $C_2=0$。于是得曲线方程：

$$\begin{cases}x=\frac{C_1}{2}(t-\sin t)\\ y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)\end{cases} \tag{11-2-12}$$

此为摆线(即旋轮线)的参数方程，其中 C_1 可由终点 A 的坐标确定。

上面推导中只考虑了下滑时间取极值的必要条件，究竟是极大还是极小还需做进一步判断。从物理上考虑，下滑时间不可能有极大值，而所得结果唯一，故可断定上面求得的曲线方程(11-2-12)就是下滑时间最短的曲线。

11.2.2 自由边界条件

自由边界条件指 $\delta x(t_1)\neq0,\delta x(t_2)\neq0$。由式(11-1-10)知，此时 $\delta f=0$ 等价于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0\\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1}=\left.\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_2}=0\end{cases} \tag{11-2-13}$$

容易看出,若只有一个边界是自由的,比如 $\delta x(t_1)=0,\delta x(t_2)\neq 0$,则上式应改为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0\\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_2}=0\end{cases} \tag{11-2-14}$$

11.2.3 两个参变量的情况

设 f 是函数 $x=x(u,v)$ 及其偏导数的泛函,u、v 都是参变量,则

$$f\{x\}=\iint_D F[x(u,v),x_u,x_v,u,v]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{11-2-15}$$

其中 D 为积分域,$x_u=\partial x/\partial u,x_v=\partial x/\partial v$。注意到

$$\delta(x_u)=\delta\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}(\delta x),\delta(x_v)=\delta\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}(\delta x)$$

则由式(11-2-15)有

$$\begin{aligned}\delta f&=\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial x_u}\frac{\partial(\delta x)}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial x_v}\frac{\partial(\delta x)}{\partial v}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_D\delta x\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial x_u}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial x_v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\\&\quad\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\delta x\frac{\partial F}{\partial x_u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\delta x\frac{\partial F}{\partial x_v}\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{11-2-16}$$

将格林公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\oint_C(\phi\mathrm{d}v+\psi\mathrm{d}u)$$

用于式(11-2-16)的第二个积分(C 为 D 的周线),可写出

$$\delta f=\iint_D\delta x\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial x_u}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial x_v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\oint_C\delta x\left(\frac{\partial F}{\partial x_u}\mathrm{d}v-\frac{\partial F}{\partial x_v}\mathrm{d}u\right) \tag{11-2-17}$$

由式(11-2-17)知,对于固定边界条件(在 C 上,$\delta x\equiv 0$)而言,泛函 $f\{x(u,v)\}$ 的极值点满足

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial x_u}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial x_v}=0 \tag{11-2-18}$$

此即两个参变量情况下的欧拉方程。

对于自由边界条件,极值点除满足式(11-2-18)外,还应满足

$$\frac{\partial F}{\partial x_u}\mathrm{d}v-\frac{\partial F}{\partial x_v}\mathrm{d}u=0 \tag{11-2-19}$$

以上虽然只讨论了两个参变量的情况,但其结论可以推广到多个参变量的情况。

【例 11-2-2】 证明在 u 的边界值确定的情况下,$\delta\int_V(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ 与 $\nabla^2u=0$ 等价。

证 记

$$f\{u(x,y,z)\}=\int_V(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_V F(u_x,u_y,u_z)\mathrm{d}V$$

在固定边界条件下，有

$$\begin{aligned}\delta f&=\int_V\delta F\mathrm{d}V=\int_V 2(u_x\delta u_x+u_y\delta u_y+u_z\delta u_z)\mathrm{d}V\\&=2\int_V\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(\delta u)}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial(\delta u)}{\partial z}\right]\mathrm{d}V\\&=2\int_V\nabla u\cdot\nabla(\delta u)\mathrm{d}V=2\int_V[\nabla\cdot(\delta u\,\nabla u)-\delta u\,\nabla^2 u]\mathrm{d}V\\&=2\oint_S\delta u\,\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-2\int_V\delta u\,\nabla^2 u\mathrm{d}V\end{aligned}\tag{11-2-20}$$

上面最后一步利用了散度定理，其中 S 为包围 V 的闭曲面，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法向单位矢。

由假定，在 S 上有 $\delta u=0$，故式(11-2-20)成为

$$\delta f=-2\int_V\delta u\,\nabla^2 u\mathrm{d}V$$

在 V 内，δu 可任意，故 $\delta f=\delta\int_V(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ 等价于 $\nabla^2 u=0$。

证完。

11.3 条件极值问题

前面已经知道，泛函极值点应满足的必要条件是 $\delta f=0$。事实上，满足该条件的点只是平稳点，也就是说，极值点首先应是平稳点，变分法的任务就是确定平稳点。至于该平稳点究竟是极大点还是极小点或鞍点，这还要经其他考虑才能确定。

本节讨论在一定约束条件下，如何确定泛函的平稳点。变分问题的约束条件既可以是泛函，也可以是多元函数。下面分别讨论。

11.3.1 约束条件是泛函

考虑泛函

$$f\{x\}=\int_{t_1}^{t_2}F(x,\dot{x},t)\mathrm{d}t\tag{11-3-1}$$

其中 $x(t)$ 在 t_1、t_2 的值已给定。欲求使 $f\{x\}$ 在约束条件

$$g\{x\}=\int_{t_1}^{t_2}G(x,\dot{x},t)\mathrm{d}t=l\quad(l\text{ 为给定值})\tag{11-3-2}$$

下的平稳点 $x(t)$，可令

$$\tilde{x}(t)=x(t)+\varepsilon_1 x_1(t)+\varepsilon_2 x_2(t)\tag{11-3-3}$$

这里 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 是与 $x(t)$ 有相同定义域的任意函数，它们在 t_1、t_2 皆为 0；ε_1、ε_2 是很小的参数，当它们趋于 0 时，$\tilde{x}(t)$ 就给出了平稳点 $x(t)$。

把式(11-3-3)代入式(11-3-1)和式(11-3-2)，并将两式视为 ε_1 和 ε_2 的函数，依次记为：

$$\phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{t_1}^{t_2}F(x+\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2,\dot{x}+\varepsilon_1\dot{x}_1+\varepsilon_2\dot{x}_2,t)\mathrm{d}t \tag{11-3-4}$$

$$\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{t_1}^{t_2}G(x+\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2,\dot{x}+\varepsilon_1\dot{x}_1+\varepsilon_2\dot{x}_2,t)\mathrm{d}t=l \tag{11-3-5}$$

则原泛函的条件极值问题就转化为普通二元函数 $\phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 在条件式(11-3-5)下的极值问题，因而可用拉格朗日乘子法求解。

引入拉格朗日乘子 λ，把上述条件极值问题看成是函数 $\phi+\lambda\psi$ 的无条件极值问题，其极值点在 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$，因此应有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}(\phi+\lambda\psi)\bigg|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=0\quad(i=1,2) \tag{11-3-6}$$

把式(11-3-4)和式(11-3-5)代入式(11-3-6)，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\lambda\frac{\partial G}{\partial x}\right)x_i+\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}+\lambda\frac{\partial G}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}_i\right]\mathrm{d}t=0\quad(i=1,2) \tag{11-3-7}$$

对式中第二项作分部积分，由于 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 在 t_1、t_2 皆为0，式(11-3-7)成为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\dot{x}}\right]x_i\mathrm{d}t=0\quad(i=1,2) \tag{11-3-8}$$

由于 x_1、x_2 任意，故由此有

$$\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\dot{x}}=0 \tag{11-3-9}$$

在此方程中，F 和 G 都是 x、$\dot{x}$、t 的已知函数，因此这是关于 $x(t)$ 的微分方程。由两个给定的边界值 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$，以及约束条件，可以确定 λ 和 $x(t)$。只要使 $f\{x\}$ 取极值，这就是问题的合理解。

注意，式(11-3-9)暗含了 $\frac{\partial G}{\partial x}\neq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial G}{\partial\dot{x}}$ 这一前提，否则方程的解将与约束条件无关。

上述结果可推广到多元泛函的条件极值问题。例如，对于泛函

$$f\{x,y\}=\int_{t_1}^{t_2}F(x,y,\dot{x},\dot{y},t)\mathrm{d}t \tag{11-3-10}$$

若约束条件为

$$g\{x,y\}=\int_{t_1}^{t_2}G(x,y,\dot{x},\dot{y},t)\mathrm{d}t=l\quad(l\text{ 为给定值}) \tag{11-3-11}$$

则 $(x(y),y(t))$ 为极值点的必要条件是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(F+\lambda G)}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\dot{x}}=0\\[2ex]\dfrac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\dot{y}}=0\end{cases} \tag{11-3-12}$$

【例 11-3-1】 在给定周长情况下，求平面上的闭合曲线，使其所围面积最大。

解 设所求曲线 C 的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$$

则按面积公式 $S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$，可写出它所围面积的泛函 f：

$$f\{x(t), y(t)\} = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathrm{d}t$$

约束条件是关于周长的，周长泛函为

$$g\{x(t), y(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}t$$

于是有

$$F+\lambda G=\frac{1}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y)+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

代入式(11-3-12)，可得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dot{y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=0\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dot{x}+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=0\end{cases}$$

对 t 积分，得

$$\begin{cases}y-\dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=C_1\\[2ex] x+\dfrac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=C_2\end{cases}$$

其中 C_1、C_2 为积分常数。消去 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，得到

$$(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2$$

此即所求的曲线方程。此为圆方程，故有结论：周长一定时，圆形区域面积最大。

由上式知 λ 为半径，故由给定的周长 l，可得 $\lambda=l/2\pi$。

本问题称为等周问题，因此，约束条件式(11-3-2)又被称为等周约束条件。比较式(11-3-9)和式(11-2-1)，可知在等周约束条件下，泛函 f 的极值条件与 $f+\lambda g$ 的无条件极值问题的欧拉方程相同。

11.3.2 约束条件是多元函数

以二元情况为例。设约束条件为

$$G(x,y,t)=0 \tag{11-3-13}$$

考虑在该条件下，泛函

$$f\{x,y\} = \int_{t_1}^{t_2} F(x,y,\dot{y},\dot{x},t)\mathrm{d}t \tag{11-3-14}$$

的平稳点$(x(t), y(t))$，这里假定 $x(t)$、$y(t)$在 t_1、t_2 处的值皆已给定。

在平稳点，有 $\delta f=0$，由式(11-3-14)即有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{11-3-15}$$

另一方面，对式(11-3-13)取变分，有

$$\frac{\partial G}{\partial x}\delta x+\frac{\partial G}{\partial y}\delta y=0 \tag{11-3-16}$$

乘以 $\lambda(t)$并积分，有

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \left(\frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta y\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{11-3-17}$$

将其与式(11-3-15)相加,有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \lambda\frac{\partial G}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y}\right)\delta y\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{11-3-18}$$

由于有式(11-3-16),故 δx、δy 两者中只能有一个任意,所以现在不能简单地得出两个方括号为 0 这样的结论。但注意到$\frac{\partial G}{\partial x}$和$\frac{\partial G}{\partial y}$不可能同时恒为 0(否则约束条件无意义),故不妨假定$\frac{\partial G}{\partial x}$不恒为 0,同时让 δy 任意。选择 λ 使式中 δx 的系数为 0,然后由"δy 任意"可知 δy 的系数也为 0。这样就有

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{11-3-19}$$

这就是$(x(y), y(t))$为极值点的必要条件。

推广到 n 元泛函

$$f\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \int_{t_1}^{t_2} F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n, t)\mathrm{d}t \tag{11-3-20}$$

它在 m 个约束条件

$$G_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m,\ m < n) \tag{11-3-21}$$

下取极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m}\left[\lambda_j(t)\frac{\partial G_j}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right] = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{11-3-22}$$

【例 11-3-2】 求圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 上 a、b 两点间长度最短的曲线。

解 约束条件为

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

因为是圆柱面,故可设曲线的参数方程为

$$x(t) = R\cos t,\quad y(t) = R\sin t,\quad z = z(t)$$

设 t_1、t_2 分别对应于 a、b,则连接 a、b 两点的曲线长度为

$$f\{x, y, z\} = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{R^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t = f\{z\}$$

这里已利用了 $\dot{x} = -R\sin t$ 和 $\dot{y} = R\cos t$。由此有 $F = \sqrt{R^2 + \dot{z}^2}$。于是按式(11-3-19)可写出

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} + \lambda\frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{z}}{\sqrt{R^2 + \dot{z}^2}} = 0$$

即有$\frac{\dot{z}}{\sqrt{R^2 + \dot{z}^2}} = C$,或整理为 $\dot{z} = C_1$。再积分,得 $z = C_1 t + C_2$。于是我们得到所求曲线的参数方程:

$$x(t) = R\cos t,\quad y(t) = R\sin t,\quad z = C_1 t + C_2$$

易于看出,这是一族螺旋线。常数 C_1、C_2 可由 a、b 的坐标确定。

这一类问题被称为测地线问题。

11.4 变分在边值问题中的应用

前面已经看到,泛函的变分问题可归结为一定边界条件下的欧拉方程。反过来,对一个给定了边界条件的定解问题(或本征值问题),如果能找到一个泛函,使其在给定边界条件下的欧拉方程恰好是定解问题中的微分方程,那么原定解问题就转化为该泛函在边界条件下的极值问题,于是可用变分法解决微分方程的边值问题。当然,前提是找到对应的泛函。

11.4.1 边值问题中泛函的一般求法

以下面的边值问题为例:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y=g(x) \quad (a<x<b) \\ y(a)=y_1, \quad y(b)=y_2\end{cases} \tag{11-4-1}$$

其中 $p(x)$、$q(x)$、$g(x)$ 皆为已知函数。把方程视为某泛函 $f\{x\}=\int_{t_1}^{t_2}F[x(t),\dot{x}(t),t]\mathrm{d}t$ 取极值的必要条件(即欧拉方程),则按式(11-1-10),问题(11-4-1)可表示为

$$\begin{cases}\displaystyle\int_a^b\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y-g(x)\right\}\delta y(x)\mathrm{d}x=0 \\ \delta y(a)=\delta y(a)=0\end{cases} \tag{11-4-2}$$

另一方面,在固定边界条件下,$\delta f=0$ 可写为

$$\begin{cases}\delta\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}F[x(t),\dot{x}(t),t]\mathrm{d}t=0 \\ \delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0\end{cases}$$

与上面对照可知,只要把式(11-4-2)中的积分方程写成 $\delta\int_{t_1}^{t_2}F[x(t),\dot{x}(t),t]\mathrm{d}t=0$ 的形式,就找到了与问题(11-4-1)相应的泛函 $f\{x\}$。这可以通过积分,并利用边界条件和格林公式而实现,具体做法如下。

先看第一项积分。注意到 $\delta y(a)=\delta y(b)=0$,$p(x)$ 对变分而言为常数,则有

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\delta y(x)\mathrm{d}x&=p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y(x)\Big|_a^b-\int_a^b p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\ &=-\int_a^b p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\delta\int_a^b p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

同理,对后面两项积分,有

$$\int_a^b q(x)y(x)\delta y(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\delta\int_a^b q(x)y^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b g(x)\delta y(x)\mathrm{d}x=\delta\int_a^b g(x)y(x)\mathrm{d}x$$

将它们代入式(11-4-2),得

$$\delta\int_a^b\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-q(x)y^2(x)+2g(x)y(x)\right]\mathrm{d}x=0$$

由此可知，边值问题(11-4-1)可看做泛函

$$f\{x\} = \int_a^b \left[p(x) \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2 - q(x)y^2(x) + 2g(x)y(x) \right] \mathrm{d}x \tag{11-4-3}$$

在固定边界条件下的极值问题，其解的两个积分常数由 $y(a)=y_1, y(b)=y_2$ 确定。

11.4.2 非齐次亥姆霍兹方程的边值问题

分两种边界条件讨论。

① 第一类边值问题

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)u(\boldsymbol{r}) = -w(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r} \in V) \\ u|_S = g(\boldsymbol{r}_S) & (\boldsymbol{r}_S \in S) \end{cases} \tag{11-4-4}$$

式中 S 为 V 的边界面，k 为常数，$w(\boldsymbol{r})$ 和 $g(\boldsymbol{r}_S)$ 皆为已知函数。

与前面做法相仿，考虑积分

$$\int_V (\nabla^2 u + k^2 u + w)\delta u \, \mathrm{d}V = 0 \tag{11-4-5}$$

对后两项，有

$$\int_V (k^2 u + w)\delta u \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\delta \int_V (k^2 u^2 + 2wu) \mathrm{d}V \tag{11-4-6}$$

对第一项 $\int_V \nabla^2 u \delta u \, \mathrm{d}V$，利用第一格林公式

$$\oiint_S v \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S = \int_V [\nabla v \cdot \nabla u + v \nabla^2 u] \mathrm{d}V \tag{11-4-7}$$

有

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 u \, \delta u \, \mathrm{d}V &= \oiint_S \delta u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S - \int_V \nabla(\delta u) \cdot (\nabla u) \mathrm{d}V \\ &= \oiint_S \delta u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S - \frac{1}{2}\delta \int_V (\nabla u)^2 \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{11-4-8}$$

因为在界面上 $\delta u = 0$，故有

$$\int_V \nabla^2 u \delta u \, \mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\delta \int_V (\nabla u)^2 \mathrm{d}V \tag{11-4-9}$$

将式(11-4-9)和式(11-4-6)代入式(11-4-5)，即有

$$\frac{1}{2}\delta \int_V [-(\nabla u)^2 + u(k^2 u + 2w)] \mathrm{d}V = 0$$

因此，边值问题(11-4-4)相当于泛函

$$f\{u\} = \int_V [(\nabla u)^2 - u(k^2 u + 2w)] \mathrm{d}V \tag{11-4-10}$$

在固定边界条件下的极值问题。

② 混合边值问题

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)u(\boldsymbol{r}) = -w(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r} \in V) \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu \right]_S = g(\boldsymbol{r}_S) & (\boldsymbol{r}_S \in S) \end{cases} \tag{11-4-11}$$

$g(\boldsymbol{r}_S)$ 和 $h(\boldsymbol{r}_S)$ 皆为已知函数。

本问题与上面情况的不同仅在边界条件，故可从式(11-4-8)开始讨论。

利用格林公式(11-4-7)，式(11-4-8)可进一步写为

$$\int_V \nabla^2 u\delta u\,\mathrm{d}V = \oiint_S \delta u\,\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\delta\left(\oiint_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \int_V u\nabla^2 u\mathrm{d}V\right)$$

因为 $\delta u\,\dfrac{\partial u}{\partial n}=\delta\left(u\,\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)-u\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)$，故上式可写为

$$\int_V \nabla^2 u\delta u\,\mathrm{d}V = \oiint_S \left[\frac{1}{2}\delta\left(u\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)- u\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right]\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\delta\int_V u\nabla^2 u\mathrm{d}V$$

对边界条件式取变分，有$\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S=-h\delta u|_S=-\delta(hu)|_S$，代入上式，得

$$\begin{aligned}\int_V \nabla^2 u\delta u\,\mathrm{d}V &= \frac{1}{2}\delta\left(\oiint_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S + \int_V u\nabla^2 u\mathrm{d}V\right) + \oiint_S u\delta(hu)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{2}\delta\left[\oiint_S u\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\mathrm{d}S + \int_V u\nabla^2 u\mathrm{d}V\right] \\ &= \frac{1}{2}\delta\left(\oiint_S ug\,\mathrm{d}S + \int_V u\nabla^2 u\mathrm{d}V\right)\end{aligned} \tag{11-4-12}$$

将式(11-4-12)和式(11-4-6)代入式(11-4-5)，即有

$$\delta\left[\oiint_S ug\,\mathrm{d}S + \int_V u(\nabla^2 u + k^2 u + 2w)\mathrm{d}V\right] = 0$$

于是，边值问题(11-4-11)就等效于泛函

$$f\{u\} = \oiint_S ug\,\mathrm{d}S + \int_V u(\nabla^2 u + k^2 u + 2w)\mathrm{d}V \tag{11-4-13}$$

在给定边界条件下的极值问题。

11.4.3 本征值问题的泛函　最小本征值

考虑本征值问题：

$$\begin{cases}(\nabla^2+\lambda)u(\boldsymbol{r})=0 \quad (\boldsymbol{r}\in V) \\ u|_S=0, \quad 或 \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0\end{cases} \tag{11-4-14}$$

当边界条件为 $u|_S=0$ 时，由式(11-4-10)可知泛函为

$$f\{u\} = \int_V [(\nabla u)^2 - \lambda u^2]\mathrm{d}V \tag{11-4-15}$$

若边界条件为$\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0$，则相当于式(11-4-11)中 $h=0,g=0$。因此按式(11-4-13)，其泛函为

$$\tilde{f}\{u\} = \int_V u(\nabla^2+\lambda)u\mathrm{d}V$$

利用格林公式(11-4-7)，以及边界条件$\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0$，可知 $\tilde{f}\{u\}=-f\{u\}$。因为泛函的符号与极值条件无关，故对上述两种边界条件，泛函都可采用式(11-4-15)的表示。

由于本征函数 u 满足归一化条件 $\int_V u^2\mathrm{d}V=1$，故本征值问题又可以与泛函的条件极值

问题联系起来。考虑泛函

$$f\{u\}=\int_V F(u_x,u_y,u_z)\mathrm{d}V=-\int_V(\nabla u)^2\mathrm{d}V \tag{11-4-16}$$

在归一化条件

$$\int_V G(u)\mathrm{d}V=\int_V u^2\mathrm{d}V=1 \tag{11-4-17}$$

之下的条件极值问题。按拉格朗日乘子法，在本问题中，式(11-3-9)应扩展为

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial u_z}\right)\right](F+\lambda G)=0$$

把上面的 F 和 G 代入，即得方程 $\nabla^2u+\lambda u=0$。可见上述本征值问题相当于泛函式(11-4-16)在归一化条件约束下的极值问题，而本征值 λ 就是拉格朗日乘子。

若将式(11-4-14)中的边界条件改为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_S=0 \tag{11-4-18}$$

则与式(11-4-15)类似，可得泛函

$$f\{u\}=-\int_V(\nabla u)^2\mathrm{d}V-\oint\!\!\!\oint_S hu^2\mathrm{d}S+\lambda\int_V u^2\mathrm{d}V \tag{11-4-19}$$

与式(11-4-15)对照，可见此时的本征值问题相当于

$$f\{u\}=-\int_V(\nabla u)^2\mathrm{d}V-\oint\!\!\!\oint_S hu^2\mathrm{d}S \tag{11-4-20}$$

在归一化条件式(11-4-17)下的条件极值问题，本征值 λ 仍是拉格朗日乘子。

值得指出的是，$-f\{u\}$ 的最小值 $-f\{u_0\}$ 恰好等于式(11-4-14)的最小本征值 λ_0。以 $f\{u\}=-\int_V(\nabla u)^2\mathrm{d}V$ 为例说明如下：

设 λ_0 和 u_0 是一对本征值和本征函数，即它们是定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u_0+\lambda_0u_0=0 \quad (\boldsymbol{r}\in V)\\ u_0|_S=0, \quad 或 \quad \left.\dfrac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S=0\end{cases} \tag{11-4-21}$$

的解。利用格林公式(11-4-7)，有

$$-f\{u_0\}=\int_V(\nabla u_0)^2\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\oint_S u_0\frac{\partial u_0}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_V u_0\nabla^2u_0\mathrm{d}V \tag{11-4-22}$$

由边界条件知曲面积分为0；再利用方程(11-4-21)，以及归一化条件，即得 $-f\{u_0\}=\lambda_0$。

若本征值 λ_1 对应于本征函数 u_1，则可同样推得 $-f\{u_1\}=\lambda_1$。因此，如果 $-f\{u_0\}$ 为全体 $-f\{u\}$ 中的最小值，那么 λ_0 一定是全体本征值中最小的。

利用这一性质，可用变分法估计本征值问题中的最小本征值。方法是，先根据归一化条件和边界条件，"猜"一个函数 $y(x)$（称为尝试函数），然后用以替换式(11-4-16)中的本征函数 $u(x)$，并求出积分 $-f\{y\}$。因为 $y(x)$ 一般不会恰好是本征函数，而仅对于本征函数，积分的最小值才等于最小本征值 λ_0，故 λ_0 必定不大于 $-f\{y\}$。这就得到了对 λ_0 上限的一种估计。例如，在一维情况下（设 $0\leqslant x\leqslant a$），式(11-4-16)即

$$\lambda_0=-f\{u_0\}=\int_0^a[u'_0(x)]^2\mathrm{d}x$$

从而有

$$\lambda_0 \leqslant -f\{y\} = \int_0^a [y'(x)]^2 \mathrm{d}x \tag{11-4-23}$$

变分法对本征值的估计结果总大于精确值，其准确程度取决于尝试函数选取得好坏。

【例 11-4-1】 估计下面本征值问题的最小本征值：

$$\begin{cases} u''(x)+\lambda u(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

解 取尝试函数

$$y(x)=\sqrt{30}x(1-x)$$

它已满足归一化条件 $\int_0^1 [y(x)]^2 \mathrm{d}x = 1$ 和边界条件。把 $y(x)$代入式(11-4-23)，即有

$$\lambda_0 \leqslant \int_0^1 [y'(x)]^2 \mathrm{d}x = 10$$

此即最小本征值的估计上限。

事实上，该本征值问题的严格解是熟知的：

$$u(x)=\sqrt{2}\sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \lambda=n^2\pi^2, \quad n=1,2,\cdots$$

λ 即本征值，其中最小者为 $\pi^2\approx 9.87$。上述估计值已很接近于精确值。

11.4.4 瑞利-里兹方法

瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)方法是近似求泛函极值的重要方法。基本思想如下：对于泛函

$$I\{y\} = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x]\mathrm{d}x$$

其中 $y(x)$是满足一定边界条件的任意函数，可设

$$y(x) = \sum_n c_n u_n(x) \tag{11-4-24}$$

这里$\{u_1(x), u_2(x), \cdots\}$是函数空间的一组基函数，它们与 $y(x)$满足同样的边界条件。代入$I\{y\}$，则有

$$I\{y\} = \int_{x_1}^{x_2} F\Big[\sum_n c_n u_n(x), \sum_n c_n u'_n(x), x\Big]\mathrm{d}x = \widetilde{I}(c_1, c_2, \cdots) \tag{11-4-25}$$

从而泛函 $I\{y\}$的极值问题转化为普通多元函数 $\widetilde{I}(c_1, c_2, \cdots)$的极值问题。多元函数的极值条件是

$$\frac{\partial \widetilde{I}(c_1, c_2, \cdots)}{\partial c_n}=0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

解此方程组，求出全体 c_n，就得到了使 $I\{y\}$取极值的函数 $y(x)$。

本方法的关键在于能“猜出”适当的基函数，使 $\sum\limits_n c_n u_n(x)$ 能很快收敛，这样就只需求很少的几个 c_n。

【例 11-4-2】 试用瑞利-里兹方法，估计下述圆域本征振动问题的最小本征值和相应的本征函数：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big(\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\Big)+\lambda R=0 \quad (\rho\leqslant a) \\ R(a)=0 \end{cases}$$

其中 R 满足归一化条件 $\int_0^a \rho R^2(\rho)\mathrm{d}\rho = 1$。

解 最小本征值 λ_0 和相应的尝试函数 y 之间满足关系式(11-4-23)。为便于计算，先作变换 $x=\rho/a$，并记 $R(\rho)=u(x)$，于是问题成为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xu')+kxu=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)\\ u(1)=0\end{cases}$$

其中 $k=\lambda a^2$。考虑到最小本征值对应于最简单的状态，此时在圆域中心($\rho=0$)处应有 $R'(\rho)=0$，这对应于 $x=0$ 处 $u'(x)=0$。又考虑到边界条件，故取尝试函数为

$$y(x)=c_1(1-x^2)+c_2(1-x^2)^2 \tag{11-4-26}$$

用尝试函数代替 u，则按式(11-4-23)有

$$\lambda_0 \leqslant \int_0^1 [y'(x)]^2\mathrm{d}x = c_1^2+\frac{4}{3}c_1c_2+\frac{2}{3}c_2^2 =-I(c_1,c_2) \tag{11-4-27}$$

而归一化条件则成为

$$\int_0^a \rho R^2(\rho)\mathrm{d}\rho = a^2\int_0^1 xy^2(x)\mathrm{d}x = 1$$

把式(11-4-26)代入此式，就给出约束条件：

$$a^2\left(\frac{1}{6}c_1^2+\frac{1}{4}c_1c_2+\frac{1}{10}c_2^2\right)=1 \tag{11-4-28}$$

于是问题转化为在约束条件式(11-4-28)下，求二元函数 $I(c_1,c_2)$ 极值的问题。

按拉格朗日乘子法，极值条件为

$$\frac{\partial}{\partial c_1}(I+\lambda g)=0,\quad \frac{\partial}{\partial c_2}(I+\lambda g)=0 \tag{11-4-29}$$

这里

$$g(c_1,c_2)=a^2\left(\frac{1}{6}c_1^2+\frac{1}{4}c_1c_2+\frac{1}{10}c_2^2\right) \tag{11-4-30}$$

由式(11-4-29)可得如下方程组：

$$\begin{cases}\left(2-\dfrac{k}{3}\right)c_1+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{k}{4}\right)c_2=0\\ \left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{k}{4}\right)c_1+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{k}{5}\right)c_2=0\end{cases} \tag{11-4-31}$$

该方程组有非零解的条件是系数行列式为0，由此解得 $k=5.7841$ 或 36.8825。因为 k 对应于本征值，故应取最小值，于是近似的最小本征值为

$$\lambda=\frac{5.7841}{a^2}$$

将 $k=5.7841$ 代入方程组(11-4-31)中的任一式，并与式(11-4-28)联立，可解得

$$c_1=\frac{1.650}{a},\quad c_2=\frac{1.054}{a}$$

代入式(11-4-26)，就得到近似的本征函数：

$$y(x)=\frac{1}{a}[1.650(1-x^2)+1.054(1-x^2)^2]$$

本问题的最小本征值和相应归一化本征函数的准确值为

$$\lambda_0=\frac{5.7831}{a^2},\quad u(x)=\frac{2.724}{a}\mathrm{J}_0(2.405x)$$

这里 J_0 是零阶贝塞尔函数。图 11-4-1 绘出了 $y(x)$ 的相对误差，其中

$$\Delta=\frac{u(x)-y(x)}{u(x)}$$

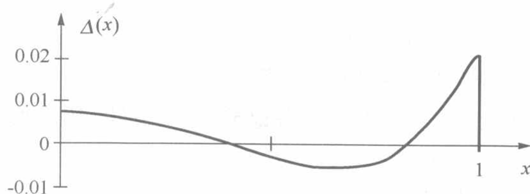


图 11-4-1　$y(x)$ 的相对误差

可见，近似结果与精确值相差很小。

11.5　变分原理

11.5.1　正则变量

考虑三维空间中由 n 个质点形成的体系。若体系受有 k 个几何约束，则体系的独立坐标数就减少为 $3n-k$ 个。这些独立坐标数目就叫做体系的自由度。若令 $3n-k=s$，则全体质点的 $3n$ 个坐标可用 s 个独立参量 $q_1,q_2,\cdots,q_s$ 及时间 t 表出。$q_1,q_2,\cdots,q_s$ 称为体系的广义坐标，它们可以是长度，也可以是角度或其他量，如面积、体积、电极化强度、磁场强度等。

$\dot{q}_i=\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t(i=1,2,\cdots,s)$ 称为广义速度。系统的动能 $T(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s)$ 是广义速度的函数。粒子在三维空间中的平动动能为 $T=m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2$，动量的相应分量为 $p_i=\dfrac{\partial T}{\partial v_i}$ $(i=x,y,z)$，故可定义广义动量为 $p_i=\partial T/\partial\dot{q}_i$。

广义坐标和广义动量统称正则变量(Canonical variable)。

11.5.2　变分原理

哈密顿认为，受有 k 个几何约束，从而自由度为 $s=3n-k$ 的体系，其真实的运动规律对应于所有具有相同端点，并为约束所允许的 s 维空间曲线中的一条(并且是唯一的一条)，它可以用变分的方法挑选出来。此即变分原理(Variable principle)，也称哈密顿原理。变分方程为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=0\quad(\text{等时变分})\tag{11-5-1}$$

其中 L 称为体系的拉格朗日函数，简称拉氏量，$\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$ 称为作用函数(或主函数)，积分路径为约束所允许的任一 s 维曲线。

对保守的力学体系而言，

$$L=T-V=L(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)\tag{11-5-2}$$

其中 T 和 V 分别为体系的动能和势能。

11.5.3 欧拉-拉格朗日方程组

交换式(11-5-1)中变分与积分的顺序，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)\mathrm{d}t=0 \tag{11-5-3}$$

在等时变分的假定下，δ 与 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 可以交换顺序，故

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}(\delta q_i)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

代入式(11-5-3)，可得

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\mathrm{d}t=0$$

因为 $\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0$，于是左边第一项为 0。又因为各 q_i 相互独立，故得

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,s) \tag{11-5-4}$$

式(11-5-4)称为体系的欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrange)方程组，简称 E-L 方程组。

由 E-L 方程组可以导出牛顿运动方程。以单质点的一维运动为例。设质点的坐标为 x。因为动能 $T=m\dot{x}^2/2$，而势能 $V=V(x,t)$ 与 $\dot{x}$ 无关，故由式(11-5-4)可写出

$$-\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}=0$$

把 T 的表达式代入，即得

$$\frac{\mathrm{d}^2(mx)}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

此即作一维运动的单质点的牛顿运动方程。

上面这个例子实际上表明，力学体系中的 E-L 方程组与牛顿运动方程等价。实际上，变分原理是一个普遍原理，几乎一切自然定律都能用变分原理加以表达。对于一个特定的领域，只要写出相应的作用函数，即可用变分法得到对该领域自然规律的描述，它就是 E-L 方程组。

11.5.4 变分原理与麦克斯韦方程组

可以导出电磁场的拉格朗日函数(该式的导出过程较繁，这里不拟介绍，有兴趣的读者可参阅电动力学方面的书籍)如下：

$$L=\int_V\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu}-\varepsilon E^2\right)-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}+\rho\phi\right]\mathrm{d}V \tag{11-5-5}$$

其中 V 为整个电磁场区域，ε 和 μ 分别表示介电常数和磁导率，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 依次为电场强度和磁感应强度，ρ 为电荷密度，$\boldsymbol{J}$ 为电流密度。ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 依次为标势和矢势：

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{11-5-6}$$

把式(11-5-5)代入式(11-5-1)，注意到 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 是已知量，它们的变分为 0，则可写出

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_V\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu}-\varepsilon E^2\right)-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}+\rho\phi\right]\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{B} - \varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}\cdot(\delta\boldsymbol{A}) + \rho(\delta\phi) \right] \mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

利用式(11-5-6),上式可写为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \left\{ \boldsymbol{H}\cdot\delta(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{D}\cdot\left[\nabla(\delta\phi) + \frac{\partial(\delta\boldsymbol{A})}{\partial t}\right] - \boldsymbol{J}\cdot(\delta\boldsymbol{A}) + \rho(\delta\phi) \right\} \mathrm{d}V\mathrm{d}t \tag{11-5-7}$$

由矢量导数的运算法则,有

$$\boldsymbol{H}\cdot\delta(\nabla\times\boldsymbol{A}) = (\delta\boldsymbol{A})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) + \nabla\cdot[(\delta\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{H}]$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\nabla(\delta\phi) = -(\delta\phi)(\nabla\cdot\boldsymbol{D}) + \nabla\cdot[(\delta\phi)\boldsymbol{D}]$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial(\delta\boldsymbol{A})}{\partial t} = -(\delta\boldsymbol{A})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{D}\cdot(\delta\boldsymbol{A})]$$

于是式(11-5-7)成为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \{ (\delta\boldsymbol{A})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) + \nabla\cdot[(\delta\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{H}] - (\delta\phi)(\nabla\cdot\boldsymbol{D}) +$$
$$\nabla\cdot[(\delta\phi)\boldsymbol{D}] - (\delta\boldsymbol{A})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{D}\cdot(\delta\boldsymbol{A})] - \boldsymbol{J}\cdot(\delta\boldsymbol{A}) + \rho(\delta\phi) \} \mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

根据散度定理可将$\nabla\cdot[(\delta\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{H}]$和$\nabla\cdot[(\delta\varphi)\boldsymbol{D}]$两项的体积分转化为包围积分域的曲面积分,但由于在积分曲面上$\delta\boldsymbol{A}=0$,$\delta\phi=0$(因为边界条件是确定的),故该二项积分为0。此外,$\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{D}\cdot(\delta\boldsymbol{A})]$对$t$的积分为$[\boldsymbol{D}\cdot(\delta\boldsymbol{A})]\Big|_{t_1}^{t_2}$,按假定,式(11-5-1)是等时变分,故$\delta\boldsymbol{A}(t_1)=\delta\boldsymbol{A}(t_2)=0$,因此该项也为0。综合以上,可将式(11-5-7)写为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\left(\nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\delta\boldsymbol{A} - (\nabla\cdot\boldsymbol{D} - \rho)\delta\phi - \boldsymbol{J}\cdot\delta\boldsymbol{A} \right] \mathrm{d}V\mathrm{d}t \tag{11-5-8}$$

麦克斯韦方程组为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}$$

其中前两式已与式(11-5-6)一致。将后两式代入式(11-5-8),可知右边为0。因此,麦克斯韦方程组满足变分原理。

习　题　11

11.1　证明欧拉变分方程(11-2-2)。

11.2　求以下泛函的极值曲线:

(1)$I\{y\} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

(2)$I\{y\} = \int_a^b (x^2 - y^2 + y''^2)\,\mathrm{d}x$

11.3　导出使泛函

$$I\{u\} = \iiint_V F(x, y, z; u, u_x, u_y, u_z)\mathrm{d}V$$

在约束条件 $\iiint_V [u(x,y,z)]^2 \mathrm{d}V = 1$ 下取极值的 E-L 方程组。

11.4　试用瑞利-里兹方法求以下问题的解：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -f(x,y) \quad (0<x<a, 0<y<b) \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

〔提示：取尝试函数为 $u(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}$〕

第12章 非线性微分方程简介

一个系统受到外场作用时，其有关物理量将发生相应的变化。在外场较弱的情况下，这种响应近似地与激励成正比，可以用线性微分方程来表示。但是，当线性近似不能有效地描述系统时，则必须考虑非线性效应。例如，在强电场作用下，介质的电极化强度

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\boldsymbol{\chi}^{(1)}\cdot\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\boldsymbol{\chi}^{(2)}:\boldsymbol{EE}+\varepsilon_0\boldsymbol{\chi}^{(3)}\vdots\boldsymbol{EEE}+\cdots$$

不再与场强成正比，呈现出显著的非线性性质。又如弹簧振子，当其位移很大时，胡克定律失效，成为非线性振子。非线性效应并非只是对线性效应的简单修正，而是有着更为丰富多彩的机制和特性。非线性科学研究的就是自然界中的非线性现象。

非线性科学的研究领域主要有混沌、分形、模式形成、孤子等。其中，“孤子”描述脉冲孤波在非线性色散介质中传播时类似于粒子的特征，在数学上它是非线性波动方程的局域行波解，称为孤波。在一定条件下，这种孤波不仅能不失真地传播，而且能像粒子那样经受碰撞仍保持原形继续存在。由于孤子的这种传播特性，采用光学孤子通信的前景十分诱人。

描写非线性系统的方程是非线性微分方程，即方程中含有未知函数及其导数的非一次项。非线性微分方程的求解是研究非线性问题必然要遇到的问题，这类方程无统一的求解方法。目前已经发展起来的方法有：试探函数法、摄动法、相似变换和自相似解、特殊变换、散射反演法等。非线性微分方程的求解内容十分丰富，本章仅介绍求解 KdV 方程、sine-Gordon 方程和非线性薛定谔(Non Linear Schrödinger, NLS)方程孤子解的行波法和散射反演法。

12.1 典型非线性微分方程

12.1.1 孤波和 KdV 方程

孤波的最初记载来自于英国工程师罗素在 1834 年从爱丁堡到格拉斯哥的运河上观察到的一种奇特的水波。他看见一条船被两匹马拉着沿一条狭窄的河道快速前进，当船突然停止时，河道内被船带动的水堆却没有停止下来，它激烈地翻动着，而后形成一个长约九米，高约半米的轮廓清晰且滚圆光滑的水包，并以极大的速度向前推进，在行进中其形状和

速度没有明显变化。这个水包行进了2～3千米后，才消失在逶迤的河道中。后来，罗素等人在浅水槽中，用多种方法激励水波，都观察到了类似的现象，但未能给出合理的解释。直到1895年，荷兰科学家D. J. Korteweg和G. de Vries指出，这种不弥散的波包是非线性效应与色散效应互相平衡的结果，并导出了在浅槽水表面传播的波的运动方程（即KdV方程），孤波现象才得到了解释。

KdV方程的一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{12-1-1}$$

其中第二项是非线性项，第三项是色散项，β为色散系数。

KdV方程常用的形式还有

$$\frac{\partial u}{\partial t}\pm 6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{12-1-2}$$

对式(12-1-1)作变换

$$x\to\beta^{1/3}x,\quad u\to\pm 6\beta^{1/3}u \tag{12-1-3}$$

即可得到式(12-1-2)。

事实上，孤波是一种普遍存在的物理现象。除KdV方程外，其他一些非线性偏微分方程也有孤波解，其中最具代表性的是SG方程和NLS方程。

12.1.2 SG方程

SG方程是sine-Gordon方程的简称。对处于外场中的一维原子链模型进行分析，可以导出这个方程。SG方程的一般形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_0^2\sin u=0 \tag{12-1-4}$$

其中c_0和f_0都是常数。

12.1.3 NLS方程

NLS方程是Non Linear Schrödinger方程的简称，它描写弱非线性和强色散现象。光纤中的光学孤子即满足NLS方程。NLS方程的一般形式为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0 \tag{12-1-5}$$

其中α和β分别称为色散系数和朗道(Landau)系数。

12.2 行波法求解非线性微分方程

在无限空间，非线性偏微分方程

$$\mathbf{P}u=0 \tag{12-2-1}$$

的形如

$$u=u(\xi),\quad \xi=x-ct \tag{12-2-2}$$

的解，称为方程的行波解。方程中的$\mathbf{P}$为包括时间t、空间x偏导数的微分算子，解中的c

为常数，相当于波的传播速度。若当$\xi \to \pm\infty$时，$u(\xi)\to 0$或某一恒定值，则称这个行波解为孤波解。

求行波解是求解非线性微分方程，特别是求解非线性波动方程的一种重要途径。许多简单而又重要的非线性波动方程的解析解可以通过这种方法得到。简单地说，该方法是以行波形式的试探函数式(12-2-2)代入非线性偏微分方程，将偏微分方程化为常微分方程来求解。

下面用行波法求解 KdV 方程、SG 方程和 NLS 方程的孤波解。

12.2.1 KdV 方程的孤波解

将试探函数式(12-2-2)代入 KdV 方程(12-1-1)，使其成为常微分方程

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\beta\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}=0 \tag{12-2-3}$$

两边对ξ积分一次，得

$$-cu+\frac{1}{2}u^2+\beta\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}=A$$

用$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$乘上式，有

$$-cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\frac{1}{2}u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\beta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)=A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$$

即

$$-cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\frac{1}{2}u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\frac{1}{2}\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$$

再对ξ积分，可得

$$-\frac{1}{2}cu^2+\frac{1}{6}u^3+\frac{\beta}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=Au+B \tag{12-2-4}$$

其中A、B为积分常数。

孤波是一种局域稳定解，在无穷远处衰减为零，故有边界条件：

$$u(\xi)\to 0,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\to 0\quad (\xi\to\pm\infty) \tag{12-2-5}$$

按此边界条件，在式(12-2-4)中应取$A=0$，$B=0$，于是有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{u^2}{3\beta}(3c-u)$$

由此可得

$$\mathrm{d}\xi=\pm\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\frac{c}{\beta}-\frac{u}{3\beta}}}$$

令

$$k=\sqrt{\frac{c}{\beta}},\quad g^2=1-\frac{u}{3c}$$

则上式成为

$$\mathrm{d}\xi=\pm\frac{2}{k}\frac{\mathrm{d}g}{1-g^2}=\pm\frac{1}{k}\left(\frac{\mathrm{d}g}{1+g}+\frac{\mathrm{d}g}{1-g}\right) \tag{12-2-6}$$

取"＋"号(取"－"号并不影响最后结果)，两边积分，得

$$k(\xi-\xi_0)=\ln\frac{1+g}{1-g}=\ln\frac{3\left(\sqrt{c}+\sqrt{c-u/3}\right)^2}{u} \tag{12-2-7}$$

即

$$\mathrm{e}^{k(\xi-\xi_0)}=\frac{3\left(\sqrt{c}+\sqrt{c-u/3}\right)^2}{u} \tag{12-2-8}$$

另一方面，式(12-2-7)两边都添一负号仍是方程(12-2-6)的解，故又有

$$\mathrm{e}^{-k(\xi-\xi_0)}=\frac{3\left(\sqrt{c}-\sqrt{c-u/3}\right)^2}{u} \tag{12-2-9}$$

式(12-2-8)与式(12-2-9)相加，得

$$\mathrm{e}^{k(\xi-\xi_0)}+\mathrm{e}^{-k(\xi-\xi_0)}=\frac{12c-2u}{u}$$

由此可解出

$$\begin{aligned} u&=\frac{6c}{1+\mathrm{ch}k(\xi-\xi_0)}=3c\ \mathrm{sech}^2\frac{k(\xi-\xi_0)}{2}\\ &=3c\ \mathrm{sech}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\beta}}\left[(x-x_0)-c(t-t_0)\right]\right\} \end{aligned} \tag{12-2-10}$$

式(12-2-10)表示右行波，其图像如图 12-2-1 所示。可以看出它在传播过程中保持形状不变，故被称为孤波，或孤子。由式(12-2-10)可知，孤波的传播速度为 c(c 是任意常数，对于每一个 c 的值，KdV 方程都有一个孤波解)；孤波的振幅为 $3c$，与波速成正比，因此幅度高的孤波跑得快；孤波的宽度为 $2\sqrt{\beta/c}$。

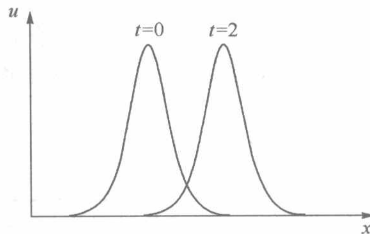


图 12-2-1　孤立波

12.2.2　SG 方程的孤波解

将试探函数式(12-2-2)代入 SG 方程(12-1-4)，得到常微分方程

$$(c^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+f_0^2\sin u=0 \tag{12-2-11}$$

对上式可分 $c^2>c_0^2$ 和 $c^2<c_0^2$ 两种情况加以讨论。

① $c^2>c_0^2$

此时，方程(12-2-11)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+m^2\sin u=0 \tag{12-2-12}$$

其中 $m^2=\dfrac{f_0^2}{c^2-c_0^2}$。

利用特殊函数积分，可求得方程(12-2-12)的椭圆正弦波解。该求解过程繁杂，这里不拟详细介绍，仅讨论当 $\xi\to\pm\infty$ 时，$u\to\pm\pi$ 这样一种特殊情况。

式(12-2-12)各项乘以$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$，对 ξ 积分一次，得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2-m^2\cos u=A \tag{12-2-13}$$

其中 A 为积分常数。

由边界条件 $\xi\to\pm\infty$ 时，$u\to\pm\pi$，且 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\to 0$，于是有 $A=m^2$。这样，式(12-2-13)可写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=2m^2(1+\cos u)=4m^2\cos^2\frac{u}{2}$$

两边开方，有

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\cos\frac{u}{2}}=\pm m\mathrm{d}\xi$$

积分后得

$$\ln\tan\frac{u+\pi}{4}=\pm m(\xi-\xi_0)$$

亦即

$$\begin{aligned} u&=-\pi+4\arctan \mathrm{e}^{\pm m(\xi-\xi_0)}\\ &=-\pi+4\arctan \mathrm{e}^{\pm m[(x-x_0)-c(t-t_0)]} \end{aligned} \tag{12-2-14}$$

式(12-2-14)给出了 SG 方程的两个扭结孤子解(指数因子取正号时称扭结孤子；取负号时称反扭结孤子)，其图像是一种冲击波的形式。取 $m=0.5$、$c=3$、$x_0=0$、$t_0=0$，则在 $t=0$ 和 $t=5$ 时刻，u 随 x 变化的图像如图 12-2-2 所示。

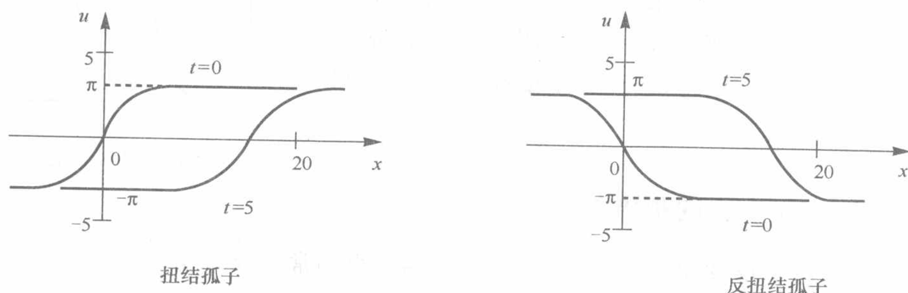


图 12-2-2 扭结孤子与反扭结孤子

② $c^2<c_0^2$

此时方程(12-2-11)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-m^2\sin u=0 \tag{12-2-15}$$

其中 $m^2=\frac{f_0^2}{c_0^2-c^2}$。

与 $c^2>c_0^2$ 时类似地求解，可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=2m^2(1-\cos u)=4m^2\sin^2\frac{u}{2}$$

两边开方，有

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sin\frac{u}{2}}=\pm m\mathrm{d}\xi$$

积分得

$$\ln\tan\frac{u}{4}=\pm m(\xi-\xi_0)$$

于是

$$u=4\arctan \mathrm{e}^{\pm m[(x-x_0)-c(t-t_0)]} \tag{12-2-16}$$

比较式(12-2-14)与式(12-2-16)，可知两者的图形相同，只是后者的曲线沿 u 轴向上平移距离 π。因此，式(12-2-16)也是扭结孤子和反扭结孤子解。

12.2.3 NLS 方程的孤波解

NLS 方程通常表征非线性的调制作用，所以常求它的包络波形式的解，即设其解为

$$u=\phi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\quad \xi=x-v_g t \tag{12-2-17}$$

其中 $\phi(x-v_g t)$ 为包络波，v_g 为群速度。

将式(12-2-17)代入 NLS 方程(12-1-5)，可得

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+\mathrm{i}(2\alpha k-v_g)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+(\omega-\alpha k^2)\phi+\beta\phi^3=0 \tag{12-2-18}$$

通常要求 $\phi(\xi)$ 是实函数，故 $\frac{\mathrm{d}\phi(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$ 前的复系数应当为零，于是有

$$v_g=2\alpha k \tag{12-2-19}$$

记

$$\omega-\alpha k^2=-\gamma\quad(\gamma>0) \tag{12-2-20}$$

则式(12-2-18)可简化为

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}-\gamma\phi+\beta\phi^3=0$$

上式两边同乘以 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}$，对 ξ 积分一次，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2-\frac{\gamma}{\alpha}\phi^2+\frac{\beta}{2\alpha}\phi^4=C \tag{12-2-21}$$

$\phi(\xi)$ 作为孤立的包络波，应满足 $\xi\to\pm\infty$ 时，$\phi(\xi)\to 0$ 和 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\to 0$，因此有 $C=0$。于是式(12-2-21)成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2-\frac{\gamma}{\alpha}\phi^2+\frac{\beta}{2\alpha}\phi^4=0 \tag{12-2-22}$$

若 $\alpha>0,\beta>0$，由式(12-2-22)可得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}-\phi^2}}=\pm\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}\mathrm{d}\xi$$

两边积分，利用积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\mathrm{arcsch}\,\frac{a}{x}$$

可得

$$-\mathrm{arcsch}\left(\frac{\sqrt{2\gamma/\beta}}{\phi}\right)=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi-\xi_0)$$

从而有

$$\phi=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\operatorname{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi-\xi_0) \tag{12-2-23}$$

如果 $\alpha>0,\beta<0$，则由式(12-2-22)可写出

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{\frac{2\gamma}{-\beta}+\phi^2}}=\pm\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}\mathrm{d}\xi$$

利用积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{arsech}\frac{a}{x}$$

可得

$$\phi=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{|\beta|}}\operatorname{csch}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi-\xi_0) \tag{12-2-24}$$

将所求得的 ϕ 的表达式(12-2-23)或式(12-2-24)代入式(12-2-17)，就得到了 NLS 方程(12-1-5)的包络孤波解。例如，将式(12-2-23)代入式(12-2-17)，可得

$$u=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\operatorname{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}[(x-v_gt)-(x_0-v_gt_0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \tag{12-2-25}$$

由上述可知，包络孤波的振幅为

$$A=\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}} \tag{12-2-26}$$

将式(12-2-26)代入式(12-2-20)，可得非线性波的色散关系：

$$\omega=\alpha k^2-\frac{\beta}{2}A^2 \tag{12-2-27}$$

在式(12-2-25)等号右边取＋号，$v_g=2.5$，$x_0=0$，$t_0=0$ 的情况下，包络孤波随时间的推移如图 12-2-3 所示。

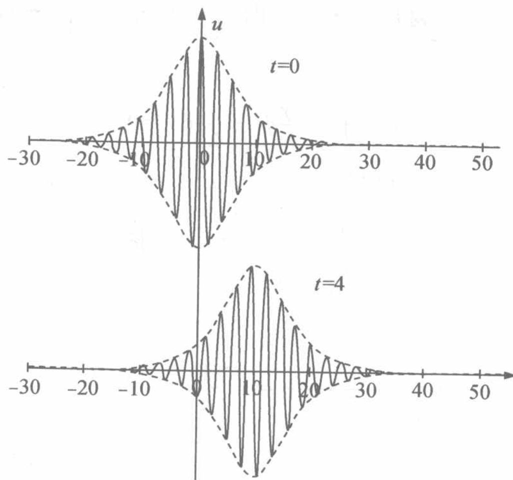


图 12-2-3　包络孤波随时间的推移

12.3　逆散射法

逆散射法在孤子理论的发展中具有重要意义。该方法最早应用于 KdV 方程的求解：通过 Gardner、Greene、Kruskal 和 Miura 等人提出的变换(GGKM 变换)，建立起 KdV 方程与薛定谔(Schrödinger)方程之间的联系，利用量子力学中的逆散射法去求解 KdV 方程的初值问题。逆散射法求解其他非线性微分方程涉及较深的数学理论，这里仅以 KdV 方程为例，说明该方法的要点。

12.3.1　GGKM 变换

对形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=0 \tag{12-3-1}$$

的 KdV 方程作变换：

$$u=\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t) \tag{12-3-2}$$

此变换称为 GGKM 交换。若将 KdV 方程中的未知函数 u 看做是量子力学中的势能，$\lambda(t)$ 为本征值，则变换式(12-3-2)实际上就是量子力学中定态波函数 ψ 满足的薛定谔方程：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(\lambda-u)\psi=0 \tag{12-3-3}$$

在 u 满足方程(12-3-1)的情况下，利用量子力学中的逆散射法，由方程(12-3-3)求出势能 u，就得到了 KdV 方程的解。求解薛定谔方程的本征值要求

$$\lim_{x\to\pm\infty} u=0 \tag{12-3-4}$$

故通常由逆散射法求得的是 KdV 方程的孤子解。

下面先简述量子力学中的散射问题，然后说明求解 KdV 方程的逆散射法。

12.3.2　量子力学中的散射问题

由式(12-3-4)，当 $x\to\pm\infty$ 时，方程(12-3-3)近似为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda\psi=0 \tag{12-3-5}$$

若 $\lambda<0$，则本征值 λ 只能取有限个分立值：

$$\lambda=-k_n^2 \quad (k_n>0, n=1,2,\cdots,N) \tag{12-3-6}$$

相应的本征函数渐近式为

$$\psi_n\sim\begin{cases} c_n e^{k_n x} & (x\to-\infty) \\ c_n e^{-k_n x} & (x\to+\infty)\end{cases} \tag{12-3-7}$$

其中常数 c_n 由归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^2\mathrm{d}x=1$ 确定。

显然，$\lambda<0$ 时，ψ_n 表示的是束缚态。

若 $\lambda>0$，则本征值取连续值：

$$\lambda=k^2 \tag{12-3-8}$$

相应本征函数的渐近式为

$$\psi\sim\begin{cases}e^{-ikx}+b(k)e^{ikx} & (x\to-\infty)\\ a(k)e^{-ikx} & (x\to\infty)\end{cases} \tag{12-3-9}$$

这是非束缚态。

式(12-3-9)表示,振幅为 1 的平面波 e^{-ikx} 从 $x=-\infty$ 处入射,遇到势垒后,一部分 $b(k)e^{ikx}$ 被反射回到 $x=-\infty$,另一部分 $a(k)e^{-ikx}$ 则透过势垒传至 $x=+\infty$处。透射系数 $a(k)$ 和反射系数 $b(k)$ 满足 $|a|^2+|b|^2=1$。

以上诸式中的 λ、c_n、$a(k)$、$b(k)$ 统称为散射量。

若已知势函数 u,求解薛定谔方程(12-3-3),并要求方程的解满足无穷远处的渐近性质式(12-3-7)或式(12-3-9),可求得散射量 λ、c_n、$a(k)$、$b(k)$ 以及波函数 ψ。这是量子力学中的正散射问题。

反过来,由散射量 λ、c_n、$a(k)$、$b(k)$ 去探知势函数 u,则是逆散射问题。

散射量和势函数 u 之间的联系由 GLM(Gelfand-Levitan-Marchenko)理论给出,简述如下:

设薛定谔方程(12-3-3)的解为

$$\psi(x,t,k)=e^{-ikx}+\int_x^{+\infty}K(x,y,t)e^{-iky}\,dy \tag{12-3-10}$$

其中 $K(x,y,t)$ 是待定函数,且规定 $y<x$ 时,$K(x,y,t)=0$。可以证明,$K(x,y,t)$ 满足下述方程:

$$K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{+\infty}B(y+z,t)K(x,z,t)\,dz=0 \quad (y>x) \tag{12-3-11}$$

这是一个积分方程,称为 GLM 积分方程,它的核为

$$B(x,t)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2(k_n,t)e^{-k_nx}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}b(k,t)e^{ikx}\,dx \tag{12-3-12}$$

这里包含了本征值 λ 的离散谱和连续谱的共同贡献。

将式(12-3-10)代入式(12-3-3)并整理,可得

$$u(x,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t) \tag{12-3-13}$$

12.3.3 逆散射法

由上述,逆散射法的关键在于求出各散射量,然后根据式(12-3-11)、式(12-3-12)求出 $K(x,y,t)$,便可由式(12-3-13)求得 $u(x,t)$。下面具体说明如何应用逆散射法求解 KdV 方程的初值问题。

考虑初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-6u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 & (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=u_0(x) & (-\infty<x<+\infty)\end{cases} \tag{12-3-14}$$

分三步进行求解。

第一步：以给定的初值 $u_0(x)$ 作为势函数，解薛定谔方程的下述本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+[\lambda_0-u_0(x)]\psi_0=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\\ \psi_0|_{x\to\pm\infty}=0\end{cases} \tag{12-3-15}$$

以获得初始散射量 λ_0、$c_n(0)$、$a(k,0)$、$b(k,0)$。这一步是正散射问题。

由量子力学的正散射方法，对于束缚态：

$$\lambda=-k_n^2 \quad (k_n>0,n=1,2,\cdots,N) \tag{12-3-16}$$

本征函数渐近式为

$$\psi_0\sim\begin{cases}c_n(0)\mathrm{e}^{k_n x} \quad (x\to-\infty)\\ c_n(0)\mathrm{e}^{-k_n x} \quad (x\to+\infty)\end{cases} \tag{12-3-17}$$

$c_n(0)$ 由归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^2\mathrm{d}x=1$ 确定。

对于非束缚态：

$$\lambda_0=k^2 \tag{12-3-18}$$

本征函数的渐近式为

$$\psi_0\sim\begin{cases}a(k,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \quad (x\to+\infty)\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+b(k,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad (x\to-\infty)\end{cases} \tag{12-3-19}$$

第二步：由 KdV 方程确定散射量的演变规律，从而求得任意时刻的散射量 λ、$c_n(t)$、$a(k,t)$ 和 $b(k,t)$。

将 GGKM 变换式(12-3-2)代入式(12-3-14)中的 KdV 方程，可以得到

$$\psi^2\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0 \tag{12-3-20}$$

其中

$$Q=\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{12-3-21}$$

将方程(12-3-20)两边对 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，注意到

$$\psi\to0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}\to0 \quad (x\to\pm\infty) \tag{12-3-22}$$

而且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\mathrm{d}x=\text{有限值} \tag{12-3-23}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=0 \tag{12-3-24}$$

这表明 λ 不随时间变化，因此，相应的 k_n 和 k 也不随时间变化。

利用式(12-3-24)，方程(12-3-20)可简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0$$

对 x 积分后得到

$$\psi^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\psi}\right)=D(t)$$

其中 $D(t)$ 为 t 的任意函数。上式给出

$$Q = D(t)\psi\int_0^x \frac{1}{\psi^2}\mathrm{d}x + E(t)\psi \tag{12-3-25}$$

其中 $E(t)$ 也是 t 的任意函数。

对于离散谱，由式(12-3-17)，$x\to\pm\infty$ 时，$\psi\to 0$，$\frac{1}{\psi}\to\infty$，而 Q 有界，故应有 $D(t)=0$。因此

$$Q=E(t)\psi$$

上式两边同乘以 ψ，利用式(12-3-2)和式(12-3-21)，上式化为

$$E(t)\psi^2=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\psi^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-3\lambda\psi^2\right]$$

两边对 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，利用式(12-3-22)和式(12-3-23)，可得

$$E(t)=0$$

因此，对 $\lambda=-k_n^2$ 的离散情况，有 $Q=0$，式(12-3-21)成为

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

按式(12-3-7)，$x\to+\infty$ 时，$\psi\sim c_n(k_n,t)\mathrm{e}^{-k_n x}$，且 $u\to 0$，故可得到

$$\frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t}=4k_n^3 c_n$$

因此

$$c_n(k_n,t)=c_n(0)\mathrm{e}^{4k_n^3 t} \tag{12-3-26}$$

对于连续谱，当 $x\to+\infty$ 时，$u\to 0$，$\psi\sim a_n(k_n,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n x}$，因此式(12-3-21)和式(12-3-25)近似为

$$Q\sim\left(\frac{\partial a}{\partial t}+4\mathrm{i}k^3 a\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\quad Q\sim\left[\frac{D(t)}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kx}\,\mathrm{d}x+E(t)a\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

两式联立，有

$$\frac{\partial a}{\partial t}+[4\mathrm{i}k^3-E(t)]a=\frac{D(t)}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kx}\,\mathrm{d}x$$

上式左边仅是 t 的函数，而右边含有与 x 有关的项 $\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kx}\,\mathrm{d}x$，因而等式成立的条件是 $D(t)=0$。故有

$$\frac{\partial a}{\partial t}+[4\mathrm{i}k^3-E(t)]a=0 \tag{12-3-27}$$

又当 $x\to-\infty$ 时，$u\to 0$，$\psi\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n x}+b_n(k_n,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}$，由(12-3-21)和式(12-3-25)，并注意到 $D(t)=0$，可得

$$\left[\frac{\partial b}{\partial t}-4\mathrm{i}k^3 b-E(t)b\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+[4\mathrm{i}k^3-E(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}=0$$

由此得到

$$E(t)=4\mathrm{i}k^3 \tag{12-3-28}$$

和

$$\frac{\partial b}{\partial t}=8\mathrm{i}k^3 b$$

即

$$b(k,t)=b(k,0)\mathrm{e}^{8ik^3t} \tag{12-3-29}$$

将式(12-3-28)代入式(12-3-27)，得到$\frac{\partial a}{\partial t}=0$，其解为

$$a(k,t)=a(k,0) \tag{12-3-30}$$

式(12-3-24)、式(12-3-26)、式(12-3-29)和式(12-3-30)给出了散射量的演变规律。由初始散射量，根据这些关系式，便可定出任意时刻的散射量。

第三步：利用经上两步骤所求得的散射量 $c_n(k_n,t)$、$a(k,t)$、$b(k,t)$，按 GLM 理论〔式(12-3-11)～式(12-3-13)〕，便可得到 u。

因为所有散射量都是由问题(12-3-14)确定的，所以，如此求得的 u 就是 KdV 方程初值问题(12-3-14)的解。

12.4 KdV 方程的单、双孤子解

本节用逆散射法求解下面 KdV 方程初值问题的孤子解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-6u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (-\infty<x<+\infty,\ t>0)\\ u|_{t=0}=-U_0\,\mathrm{sech}^2 x \quad (-\infty<x<+\infty)\end{cases} \tag{12-4-1}$$

其中 U_0 为常数。

U_0 不同，方程(12-4-1)的解截然不同。可以证明，当 U_0 满足 $U_0=l(l+1)(l=1,2,\cdots)$ 时，反射系数 $b=0$。而 U_0 不满足这个条件时，问题比较复杂，这里不予讨论。当 $b=0$ 时，式(12-3-12)简化为

$$B(x,t)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2(k_n,t)\mathrm{e}^{-k_n x} \tag{12-4-2}$$

即在此情形下，仅需考虑离散谱的贡献。

12.4.1 单孤子解

设 $U_0=2$，用逆散射法求解方程(12-4-1)。

第一步，以初值 $u_0(x)=-2\,\mathrm{sech}^2 x$ 作为势函数，解下面薛定谔方程的本征值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+(\lambda+2\mathrm{sech}^2 x)\psi_0=0 \quad (-\infty<x<+\infty)\\ \psi_0|_{x\to\pm\infty}=0\end{cases} \tag{12-4-3}$$

对于离散谱，$\lambda=-k_n^2(k_n>0,n=1,2,\cdots,N)$。作变换

$$\eta=\tanh x \tag{12-4-4}$$

则问题(12-4-3)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\eta}\right]+\left(2-\dfrac{k_n^2}{1-\eta^2}\right)\psi_0=0 \quad (-1<\eta<+1)\\ \psi_0|_{\eta=\pm\infty}\to 0\end{cases} \tag{12-4-5}$$

这是连带勒让德方程的本征值问题，其本征值为 $l(l+1)=2$，即 $l=1$。此时 k_n 只能取一个

值：$k_1=1$，故相应的本征函数也只有一个，为

$$\psi_0 = AP_1^1(\eta) = A\sqrt{1-\eta^2} = A\text{sech}x$$

其中常数 A 由归一化条件确定：

$$A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\text{sech}^2 x\text{d}x = 2A^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x\to+\infty$时的渐近式为

$$\psi_0 \sim 2A\text{e}^{-x} = \sqrt{2}\text{e}^{-x} \tag{12-4-6}$$

与式(12-3-17)比较，有

$$c_1(0) = \sqrt{2} \tag{12-4-7}$$

第二步，确定任意时刻的散射量：

由式(12-3-26)和式(12-4-7)，可得

$$c_1(k_1,t) = c_1(0)\text{e}^{4k_1^3 t} = \sqrt{2}\text{e}^{4t} \tag{12-4-8}$$

第三步，解 GLM 积分方程，求 $u(x,t)$：

根据式(12-4-2)有

$$B(x,t) = c_1^2(k_1,t)\text{e}^{-x} = 2\text{e}^{-(x-8t)} \tag{12-4-9}$$

GLM 积分方程(12-3-11)化为

$$K(x,y,t) + 2\text{e}^{-y}\text{e}^{-(x-8t)} + 2\text{e}^{-(y-8t)}\int_x^{+\infty}\text{e}^{-z}K(x,z,t)\text{d}z = 0 \tag{12-4-10}$$

设 $K(x,y,t)=I(x,t)\text{e}^{-y}$，代入方程(12-4-10)，可得

$$I(x,t) = -\text{e}^{4t}\text{sech}(x-4t)$$

故

$$K(x,y,t) = -\text{e}^{-(y-4t)}\text{sech}(x-4t) \tag{12-4-11}$$

将式(12-4-11)代入式(12-3-13)，即可求得问题(12-4-1)当 $U_0=2$ 时的解：

$$u = -2\text{sech}^2(x-4t) \tag{12-4-12}$$

这就是 KdV 方程的单孤子解。

12.4.2 双孤子解

设 $U_0=6$，求解方程(12-4-1)。该问题的求解步骤与上一问题完全相同。

第一步，以初值 $u_0(x)=-6\ \text{sech}^2 x$ 作为势函数，解薛定谔方程的本征值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + (\lambda + 6\text{sech}^2 x)\psi_0 = 0 \quad (-\infty < x < +\infty)\\ \psi_0|_{x\to\pm\infty} = 0\end{cases} \tag{12-4-13}$$

作式(12-4-4)的变换，则问题(12-4-13)化为连带勒让德方程的本征值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\eta}\right] + \left(6 - \dfrac{k_n^2}{1-\eta^2}\right)\psi_0 = 0\\ \psi_0|_{\eta=\pm\infty}\to 0\end{cases} \tag{12-4-14}$$

这里 $l(l+1)=6$，故 $l=2$。于是 k_n 可取两个值：$k_1=1$，$k_2=2$；相应的本征函数也有两个：

$$\psi_0^{(1)} = A_1\text{P}_2^1(\eta) = A_1 3\eta\sqrt{1-\eta^2} = 3A_1\tanh x\ \text{sech}\, x \tag{12-4-15a}$$

$$\psi_0^{(2)} = A_2\text{P}_2^2(\eta) = A_2 3(1-\eta^2) = 3A_2\text{sech}^2 x \tag{12-4-15b}$$

常数仍由归一化条件确定：

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad A_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$x\to+\infty$时，式(12-4-15)的渐近式为

$$\psi_0^{(1)}\sim\sqrt{6}\mathrm{e}^{-x},\quad \psi_0^{(2)}\sim2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-2x} \tag{12-4-16}$$

与式(12-3-17)对照，可得

$$c_1(0)=\sqrt{6},\quad c_2(0)=2\sqrt{3} \tag{12-4-17}$$

第二步，确定任意时刻的散射量：

由式(12-3-26)和式(12-4-17)，有

$$c_1(k_1,t)=\sqrt{6}\mathrm{e}^{4t},\quad c_2(k_2,t)=2\sqrt{3}\mathrm{e}^{32t} \tag{12-4-18}$$

第三步，解 GLM 积分方程，求 $u(x,t)$：

根据式(12-4-2)有

$$B(x,t)=6\mathrm{e}^{-(x-8t)}+12\mathrm{e}^{-2(x-32t)} \tag{12-4-19}$$

GLM 积分方程化为

$$K(x,y,t)+6\mathrm{e}^{-(x+y-8t)}+12\mathrm{e}^{-2(x+y-32t)}+\int_x^{+\infty}[6\mathrm{e}^{-(y+z-8t)}+12\mathrm{e}^{-2(x+z-32t)}]K(x,z,t)\mathrm{d}z=0 \tag{12-4-20}$$

设

$$K(x,y,t)=I_1(x,t)\mathrm{e}^{-y}+I_2(x,t)\mathrm{e}^{-2y} \tag{12-4-21}$$

代入方程(12-4-20)，可得

$$\begin{cases}[1+3\mathrm{e}^{-2(x-4t)}]I_1+2\mathrm{e}^{-2(x-4t)}I_2=-6\mathrm{e}^{-(x-8t)}\\ 4\mathrm{e}^{-(3x-64t)}I_1+[1+3\mathrm{e}^{-4(x-16t)}]I_2=-12\mathrm{e}^{-2(x-32t)}\end{cases} \tag{12-4-22}$$

上两式分别乘以 e^{-x} 和 e^{-2x}，并引入

$$\xi_1=x-4t,\qquad \xi_2=x-16t \tag{12-4-23}$$

$$J_1(x,t)=\mathrm{e}^{-x}I_1(x,t),\quad J_2(x,t)=\mathrm{e}^{-2x}I_2(x,t) \tag{12-4-24}$$

则式(12-4-22)化为

$$\begin{cases}(1+3\mathrm{e}^{-2\xi_1})J_1+2\mathrm{e}^{-2\xi_1}J_2=-6\mathrm{e}^{-2\xi_1}\\ 4\mathrm{e}^{-2\xi_2}J_1+(1+3\mathrm{e}^{-4\xi_2})J_2=-12\mathrm{e}^{-4\xi_2}\end{cases}$$

由此可求得

$$J_1(x,t)=\frac{D_1}{D},\quad J_2(x,t)=\frac{D_2}{D} \tag{12-4-25}$$

其中

$$D_1=-6\mathrm{e}^{-2\xi_1}(1-\mathrm{e}^{-4\xi_2}),\quad D_2=-12\mathrm{e}^{-4\xi_2}(1+\mathrm{e}^{-2\xi_1}) \tag{12-4-26}$$

$$D=1+3\mathrm{e}^{-2\xi_1}+3\mathrm{e}^{-4\xi_2}+\mathrm{e}^{-2\xi_1-4\xi_2} \tag{12-4-27}$$

综合式(12-4-21)、式(12-4-24)～式(12-4-27)，可得

$$K(x,y,t)=-6\frac{\mathrm{e}^{-2(x-4t)}+2\mathrm{e}^{-4(x-16t)}+\mathrm{e}^{-6(x-12t)}}{1+3\mathrm{e}^{-2(x-4t)}+3\mathrm{e}^{-4(x-16t)}+\mathrm{e}^{-6(x-12t)}} \tag{12-4-28}$$

再由式(12-3-13)，即可求得问题(12-4-1)当 $U_0=6$ 时的解：

$$u=-12\frac{3+4\mathrm{ch}\,2(x-4t)+\mathrm{ch}\,4(x-16t)}{[3\mathrm{ch}\,(x-28t)+\mathrm{ch}\,3(x-12t)]^2} \tag{12-4-29}$$

这就是 KdV 方程的双孤子解。

下面说明当 $t\to\pm\infty$ 时，式(12-4-29)明显地表征双孤子，即两个单孤子的叠加。

首先固定 $\xi_1=x-4t$。因 $\xi_2=\xi_1-12t$，故当 $t\to-\infty$ 时，$e^{-4\xi_2}\to0$；而当 $t\to+\infty$ 时，$e^{4\xi_2}\to0$，因而有

$$\lim_{t\to-\infty}K(x,x,t)=-\frac{6e^{-2\xi_1}}{1+3e^{-2\xi_1}}$$

$$\lim_{t\to+\infty}K(x,x,t)=-\frac{6(1+e^{2\xi_1})}{1+3e^{2\xi_1}}$$

故

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to-\infty}u=12\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-2\xi_1}}{1+3e^{-2\xi_1}}\right)=-2\operatorname{sech}^2\left(x-4t-\dfrac{\ln 3}{2}\right)\\ \lim\limits_{t\to+\infty}u=12\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1+2e^{2\xi_1}}{1+3e^{2\xi_1}}\right)^2=-2\operatorname{sech}^2\left(x-4t+\dfrac{\ln 3}{2}\right)\end{cases}\tag{12-4-30}$$

它表征振幅 $a=2$、以波速 $c=4$ 前进的孤波。

其次，固定 $\xi_2=x-16t$。因 $\xi_1=\xi_2+12t$，故当 $t\to-\infty$ 时，$e^{2\xi_1}\to0$；$t\to+\infty$ 时，$e^{-2\xi_1}\to0$。因而有

$$\lim_{t\to-\infty}K(x,x,t)=-\frac{6(1+e^{4\xi_2})}{1+3e^{4\xi_2}},\ \lim_{t\to+\infty}K(x,x,t)=-\frac{12e^{-4\xi_2}}{1+3e^{-4\xi_2}}$$

所以

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to-\infty}u=12\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1+e^{4\xi_2}}{1+3e^{4\xi_2}}\right)=-8\operatorname{sech}^2\left[2\left(x-16t+\dfrac{\ln 3}{4}\right)\right]\\ \lim\limits_{t\to+\infty}u=24\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-4\xi_2}}{1+3e^{-4\xi_2}}\right)=-8\operatorname{sech}^2\left[2\left(x-16t-\dfrac{\ln 3}{4}\right)\right]\end{cases}\tag{12-4-31}$$

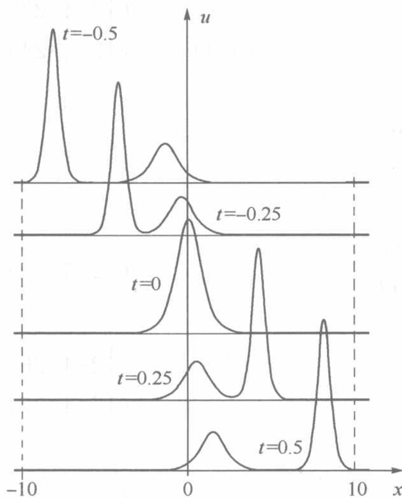


图 12-4-1　双孤子随时间的演化

它表征振幅 $a=8$、以速度 $c=16$ 前进的孤波。

图 12-4-1 给出上述双孤子随时间演化的情况。图中显示，两个同向行进的孤波，振幅较大、原来在后的孤波逐渐赶上前面振幅较小的孤波，然后又很好地分开，各自保持原来的波形继续前进。

对于 $U_0=l(l+1)$ 当 $l=3,4,\cdots,N$ 时，用同样的方法，可以求得 KdV 方程的多孤子解。由式(12-4-1)可知，在初始时刻，$u_0(x)$ 表示一个孤子，而 U_0 则表示初始时刻单个孤子的能量。以上讨论表明，随着时间的推移，一个孤子将分裂成 N 个孤子。初始时刻单个孤子的能量越大，分裂出的孤子数就越多。

习　题　12

12.1　证明下列方程可以化为标准的 KdV 方程(12-1-1)：

(1)$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$

(2)$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\quad(\beta<0)$

12.2　验证解

(1)$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,\quad u=-2k^2\operatorname{sech}^2[k(x-4k^2t)]$

(2)$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

$u=-\frac{1}{2}k^2\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(kx+ly-\omega t)\right]\quad\left(\omega=k^3+3\frac{l^3}{k}\right)$

(3)$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+|u|^2u=0,\quad u=\frac{1-4(1+2\mathrm{i}t)}{1+2x^2+4t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

12.3　证明 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0$$

通过变换 $x=\sqrt{\alpha}y,u=\sqrt{\frac{2}{\beta}}v$,可化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2|v|^2v=0$$

12.4　求 mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

的行波解。

部分习题参考答案

习题 1

1.2　$\alpha \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{e}^{\alpha \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}}$

1.6　在圆柱坐标系中，$\nabla \times \boldsymbol{e}_\rho = 0, \nabla \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_z \dfrac{1}{\rho}, \nabla \times \boldsymbol{e}_z = 0$

在球坐标系中，$\nabla \times \boldsymbol{e}_r = 0, \nabla \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi \dfrac{1}{r}, \nabla \times \boldsymbol{e}_\varphi = \dfrac{1}{r}(\boldsymbol{e}_r \cot\theta - \boldsymbol{e}_\varphi)$

习题 2

2.1　(1) $\dfrac{3}{8}\pi$，　(2) $\dfrac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}$

2.4　(1) $-\dfrac{\pi}{\mathrm{e}} \sin 2$，　(2) $\dfrac{\pi}{4}(2-\sqrt{2})$，　(3) $\dfrac{n\pi(2n-3)!!}{(2n)!!a^{n-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}$，　(4) $\dfrac{\pi \sin(p\lambda)}{\sin \lambda \sin(\pi p)}$

2.5　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-\mathrm{i})^k}{(1-\mathrm{i})^{k+1}}$

习题 3

3.3　圆 $16\xi^2+16\eta^2+24\xi+44\eta+9=0$；直线 $4\xi+3=0$

3.4　顺次作映射：$z_1=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right), z_2=z_1^2, z_3=\dfrac{32}{9} z_2+1, \zeta=-(z_3+\sqrt{z_3^2-1})$

3.5　等势线是以点 $(\pm a, 0)$ 为焦点的共焦双曲线族，电力线是以点 $(\pm a, 0)$ 为焦点的共焦椭圆族。

3.6 $E_y\Big|_{x=0}=\dfrac{\eta_h\lambda}{4a\varepsilon_0(\eta_h^2-\eta^2)\sqrt{1+\eta^2}}(0\leqslant\eta\leqslant\eta_h)$，其中，$\eta$ 与 y 的关系是 $y=\dfrac{2a}{\pi}[\eta\sqrt{1+\eta^2}+\ln(n+\sqrt{1+\eta^2})]$，$\eta_h$ 是 $y=h$ 时的 η 值。

习题 4

4.1 $z_r=\pm1,\ \rho=0,\ \dfrac{1}{2}$；　　$z_r=\infty,\ \rho=\pm\sqrt{\lambda(\lambda+1)}$

4.2 $z_r=\pm1,\ \rho=0,\ \dfrac{3}{2}$；　　$z_r=0,\ \rho=\pm1$

4.4 $u_1(z)=az$（a 为常数），$u_2(z)=az\ln z+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\partial a_n}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1}z^{n+1}$，$a_n$ 由式(4-2-6)递推，其中 $b_1=-1,c_1=1,b_k=c_k=0(k\neq1)$。

习题 5

5.3 $u_2=(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{F}(1-\alpha,1-\beta;2-\gamma;z)$

习题 6

6.1 $C_m(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{F}\left(l+1+m,-l+m;1+m;\dfrac{1+\zeta}{2}\right)$，$C_m$ 为常数。

6.4 $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!\,(n+1)!}\mathrm{P}_{2n}(x)$

6.5 $\dfrac{3}{5}\mathrm{P}_1(x)+\dfrac{2}{5}\mathrm{P}_3(x)$

6.6 $\dfrac{2l(l+1)}{2l+1}$

习题 7

7.4 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-2m}{z}-1\right)\mathrm{M}_{k,\pm m}(z)+\dfrac{\frac{1}{2}\pm m-k}{(1\pm2m)z^{1/2}}\mathrm{M}_{k-\frac{1}{2},\pm m+\frac{1}{2}}(z)$

习题 8

8.6 (1) $\dfrac{z}{a}\mathrm{J}_1(az)$，　(2) $(z^3-4z)\mathrm{J}_1(z)+2z^2\mathrm{J}_0(z)$

(3) $\frac{z^2}{2}[J_l^2(az)-J_{l-1}(az)J_{l+1}(az)]$

(4) $\frac{z}{a^2+b^2}[aK_l(bz)J_{l+1}(az)-bJ_l(az)K_{l+1}(bz)]$

习题 9

9.1 $f_s'=k\cos kx-k(2\sin kx+\cos kx)H(x)+(2\cos kx-\sin kx)\delta(x)$

9.2 $\frac{d^2u}{dx^2}=2\phi(x)$

习题 10

10.1 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$

10.2 $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)=-\frac{i}{4}[H_0^{(2)}(kR)+H_0^{(2)}(kR')]$，其中 $R'=|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0'|$，$\boldsymbol{\rho}_0'$ 是 $\boldsymbol{\rho}_0$ 关于 $x=0$ 的对称点。

10.3 $G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]$

10.4 $u(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left\{\ln\frac{a}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{2n(2n+1)}\left[1-\frac{r^{2n}}{a^{2n}}\right]P_{2n}(\cos\theta)\right\}$

习题 11

11.2 (1) $y=\frac{1}{4}(x-C_1)^2+C_2$，$C_1$、$C_2$ 由边界条件决定。

(2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$，$C_1\sim C_4$ 由边界条件决定。

11.3 $\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u_z}-\lambda u=0$

11.4 $u(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\frac{f_{kl}}{\left(\frac{k}{a}\right)^2-\left(\frac{l}{b}\right)^2}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}$，

这里 $f_{kl}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}d\xi d\eta$。

习题 12

12.4 $u=\pm\sqrt{\frac{6c}{a}}\operatorname{sech}\left\{\sqrt{\frac{c}{\beta}}[(x-ct)-(x_0-ct_0)]\right\}$

[General Information]
书名=电磁场分析中的应用数学
作者=余恬，雷虹编著
页数=244
SS号=12191905
DX号=
出版日期=2009.02
出版社=北京邮电大学出版社